Zeno Martini (admin)

IMPEDENZE E CIRCUITI

1 January 2004

Articolo n° 6 su 13 del corso "**Elettrotecnica di base**". Vai all'**indice** del corso.

Paragrafi dell'articolo:

Introduzione

Nell'articolo precedente si è stabilito il legame tra tensione e correntesinusoidali sui bipoli puri R, L, C, ricorrendo alla loro rappresentazione vettoriale ed ai numeri complessi. In questo articolo amplieremo la trattazione, sia vettoriale che simbolica, delle relazioni tra i bipoli comunque collegati nelle reti elettriche in c.a.s., definendo in modo generale il concetto di impedenza. La parte finale sarà dedicata ad un certo numero di esercizi, nei quali, oltre ad evidenziare la generalità dei teoremi sulle reti, ci si eserciterà ad operare con i numeri complessi.

Impedenza

Si definisce impedenza il numero complesso dato dal rapporto tra il numero complesso che rappresenta la tensione ed il numero complesso che rappresenta l'intensità di corrente. Si indica comunemente con la lettera **Z.** Si ha dunque per definizione

Z=U/I 6. 1

Osservazione: il carattere in grassetto indica il numero complesso nella sua completezza (parte reale e parte immaginaria o modulo ed argomento). Possiamo già ricavare le impedenze puramente resistive , puramente induttive e puramente capacitive, in quanto si tratta di riscrivere le relazioni dell'art. precedente(v. fig. 5.4, 5.5, 5.6). Ricordando che X_L=wL, X_C=1/wC sono le reattanze induttiva e capacitiva con w=2pf, misurate in ohm si ha la tabella seguente:

IMPEDENZA	**Forma cartesiana**	**Forma Polare**
Puramente resistiva	R	R /0
Puramente capacitiva	$-j \cdot X_C$	X_C /-90
Puramente induttiva	$j \cdot X_L$	X_L /+90

tab.6.1

Si chiama ammettenza l'inverso dell'impedenza, quindi il rapporto tra l'intensità di corrente e la tensione rappresentate con i numeri complessi.

Y=1/Z=I/U 6. 2

Ricordando che 1/j=-j e ponendo $B_C=1/X_C$, $B_L=1/X_L$ denominate susettanze rispettivamente capacitivaed induttiva, misurate in siemens come la conduttanza G=1/R, si ha per le ammettenze pure, la tab.6.2

Ammettenza	**Forma cartesiana**	**Forma Polare**
Puramente resistiva	G=1/R	G /0
Puramente capacitiva	$j \cdot B_C=1/-jX_C$	B_C /90
Puramente induttiva	$-j \cdot B_L=1/jX_L$	B_L /-90

tab 6.2

Applicando il concetto di equivalenza sviluppato nell'art. 4, ed utilizzando le metodologie di calcolo illustrate per i numeri complessi nell'art. 5, è possibile ricavare l'impedenza o l'ammettenza equivalente di qualsiasi connessione di bipoli puri.Esaminiamo i casi fondamentali.

Impedenza serie

Costruiamo un bipolo costituito dalla serie dei tre bipoli puri fondamentali.Si avrà che la **Z** (Zeq serie) è la somma delle loro impedenze pure ;

$$\mathbf{Z} = R+j\cdot X_L - jX_C = R + j\cdot X \; ; \; ; \; 6.\ 3$$

avendo postoX = X_L- X_C; L'impedenza serie è dunque un numero complesso la cui parte reale corrisponde alla resistenza mentre la parte immaginaria corrisponde ad una reattanza. ;R è un numero positivo, X può essere sia positivo che negativo a seconda del prevalere di una delle due reattanze componenti:se X>0 parleremo di <u>impedenza induttiva</u> se X<0 parleremo di <u>impedenza capacitiva</u>.Essa rappresenta il rapporto tra la tensione ai capi del bipolo e l'intensità della corrente, entrambe alternate sinusoidali, quindi entrambe ancora espresse come numeri complessi.L'impedenza è scritta in forma cartesiana ma, come ben sappiamo, ogni numero complesso può essere rappresentato in diversi modi, in particolare anche in forma polare.L'impedenza in questa forma sarà scritta ;

$$\mathbf{Z} = Z \underline{/q} = \mathbf{U/I} \; ; \; 6.\ 4$$

Avendo posto ad esempi ***U*** *= U/a,* ***I*** *= I/b*

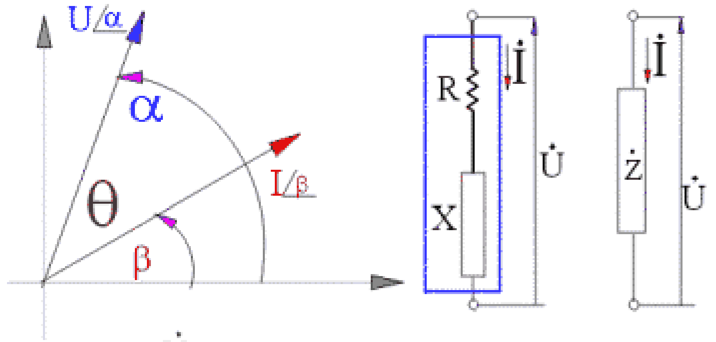
Z è il modulo dell'impedenza, uguale a U/I, ; ed è dato da

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} \; ; \; 6.\ 5$$

q è l'argomento, che è uguale ad a-b e si ricava da

q=arctan(X/R)

(angolo la cui tangente trigonometrica è uguale al rapporto tra la reattanza e la resistenza). Z è un numero positivo che si misura in ohm: esso corrisponde proprio al rapporto tra la misura della tensione efficace in volt e la misura del valore efficace dell'intensità di corrente in ampere (Z=U/I); l'argomento q corrisponde all'angolo di sfasamento tra il vettore rappresentativo della tensione ed il vettore rappresentativo della corrente.Nella fig. 6. 1 sono riassunte le relazioni matematiche e grafiche che definiscono l’impedenza. Nel caso specifico della figura la reattanza X è positiva, quindi lo è l’argomento; l’impedenza si dice ohmico-induttiva in quanto la reattanza equivalente è una reattanza induttiva; è dunque predominante l’energia magnetica e l’intensità di corrente ritarda di q gradi sulla tensione ;



$$\dot{Z}=\frac{\dot{U}}{\dot{I}}=\frac{U\angle\alpha}{I\angle\beta}=\frac{U}{I}\angle\alpha-\beta=z\angle\theta=R+jX$$

fig. 6. 1

Interpretando la tensione come causa della corrente (o viceversa) l’impedenza rappresenta il modo in cui il campo elettromagnetico definito da quel circuito elettrico determina qualitativamente e quantitativamente gli effetti dovuti alla causa.L’impedenza in c.a.s. rappresenta con una notazione compatta tutti i fenomeni energetici dissipativi e di accumulazione di quella particolare parte di circuito che fa capo ai due terminali.La 6.1 è spesso detta legge in Ohm in alternata: la sua espressione matematica rende i calcoli in c.a.s formalmente identici a quelli ; sviluppati per le correnti continue: è sufficiente operare con i numeri complessi rappresentativi di tensioni e correnti sostituendo alla resistenza l’impedenza.

Risonanza

Osserviamo che in presenza di condensatori ed induttanze in serie può verificarsi X=0. Ciò si ha se $X_L=X_C$. In questo caso l’impedenza è puramente resistiva e la condizione è detta di risonanza serie. Se L e C sono date, esiste una frequenza a cui la condizione si verifica. Essa si ricava da wL=1/wC da cui si ricava

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{L\cdot C}}$$ 6. 6 (pulsazione di risonanza)

Quindi $f_0=w_0/2p$è la frequenza di risonanza.Se al variare della frequenza si mantiene inalterato il valore efficace della tensione, alla frequenza di risonanza l’intensità di corrente è massima, I_0=U/R, la tensione applicata coincide con il valore della tensione ai capi della resistenza, mentre le tensioni ai capi di induttanza e capacità sono uguali ed in opposizione di fase e possono essere anche molto più elevate della tensione applicata.Le due reattanze alla frequenza di risonanza valgono

X_0=w_0L=1/w_0C=Ö(L/C)

Si definisce fattore di merito il rapporto

Q_m=X_0/R=(1/R)·Ö(L/C)

Nei sistemi di comunicazione la condizione di risonanza è usata per selezionare la desiderata frequenza in un segnale composto di frequenze diverse. Si definiscono *frequenze di taglio* superiore ed inferiore le frequenze alle quali l’intensità di corrente è I=I_0/Ö2=U/(Ö2·R). ; Si ricavano dall’equazione

(1/2)·U^2/R^2=U^2/(R^2+(wL-1/wC)^2)

Da cui (i numeratori sono uguali, quindi basta uguagliare i denominatori)

±R=(wL-1/wC)

w^2LC ±wCR-1=0

w^2 ±wR/L-1/LC=0

w^2 ±wR/L-w_0^2=0

Sono due equazioni di secondo grado con il coefficiente del termine di primo grado prima positivo, quindi negativo. Le soluzioni da considerare sono quelle che forniscono valori positivi, essendo priva di significato una pulsazione negativa. Quando il coefficiente è positivo la soluzioneè

w_1=(- R/L+Ö(R^2/ L^2+4w_0^2)/2 (pulsazione di taglio inferiore)

Quando il coefficiente è negativo la soluzioneè

w_2=(R/L +Ö (R^2/ L^2+4w_0^2)/2 (pulsazione di taglio superiore)

cui corrispondono le frequenze

f_1=w_1/2p;f_2=w_2/2p

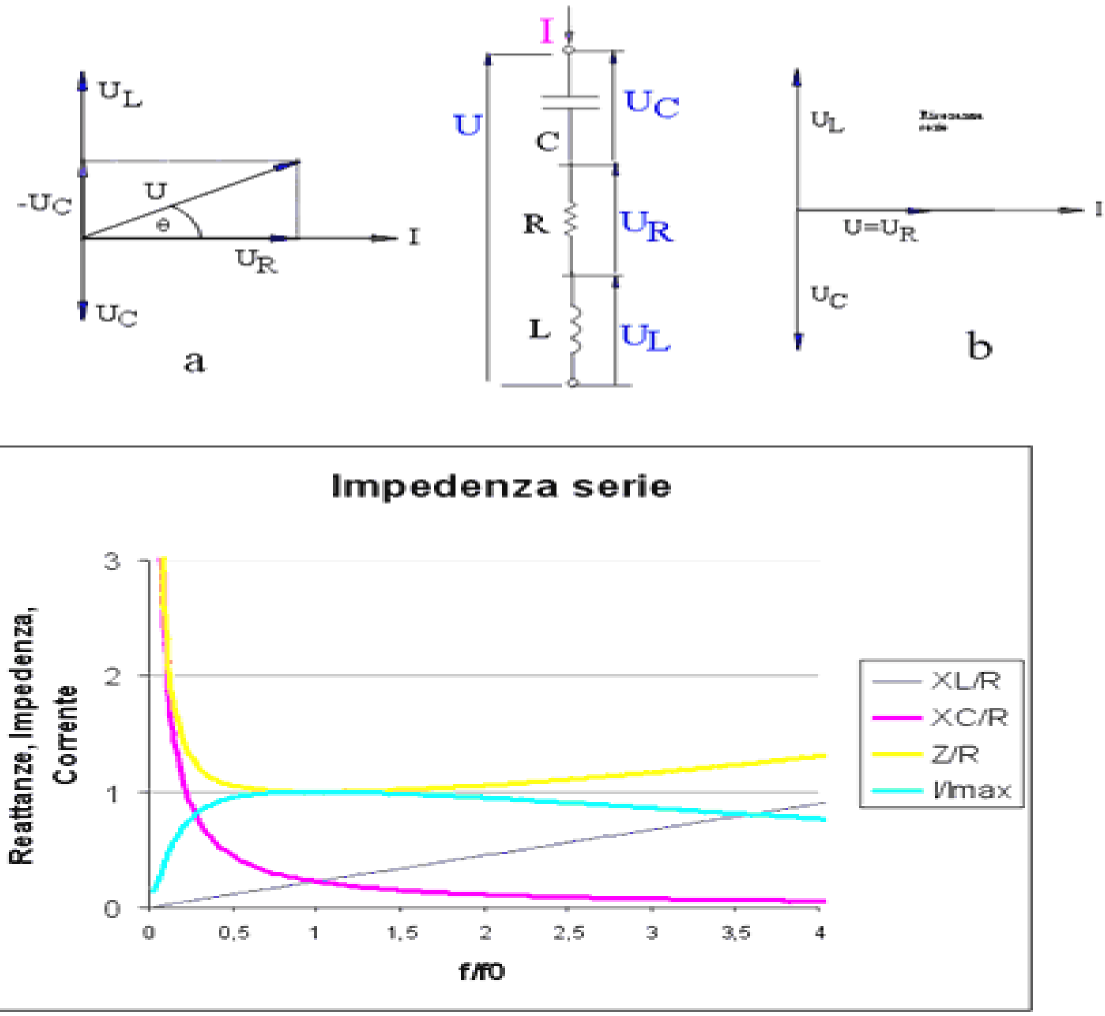
NB:Si può verificare che la frequenza di risonanza è la media geometrica delle frequenze di taglio: f_0=Öf_1*f_2

Si definisce banda passante l'insieme di frequenze comprese tra f_1 ed f_2:

Dw =w_2-w_1=R/L=w_0/Q_m

Df=f_2-f_1=Dw/2p

La banda passante è tanto più stretta, quindi tanto più selettivo è il circuito, quanto più alto è il fattore di merito. Nei sistemi di trasmissione dell'energia, i fenomeni di risonanza possono causare sovratensioni pericolose. Nella fig. 6.2 a è tracciato il diagramma vettoriale delle tensioni ai capi dei bipoli puri componenti la serie; in 6.2.b il diagramma vettoriale è tracciato in caso di risonanza; in fig. 6.2.c è mostrato l'andamento di XL, XC, Z, al variare delle frequenza. In ascisse è riportato il rapporto tra la frequenza e la frequenza di risonanza; in ordinate ci sono le reattanze e le impedenze relative all'impedenza di risonanza (coincidente con la resistenza) e l'andamento della corrente assorbita relativa alla massima corrente che si ha, come detto in condizioni di risonanza.


UL
-UC
U
θ
UR
I
UC
a
I
U
UC
C
R
UR
L
UL
UL
U=UR
I
UC
b
Impedenza serie
Reattanze, Impedenza, Corrente
3
2
1
0
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3
3,5
4
f/f0
XL/R
XC/R
Z/R
I/Imax

c

fig. 6.2

Se i tre bipoli elementari sono in parallelo conviene ragionare in termini di ammettenza. L'ammettenza equivalente è la somma delle ammettenze $Y=G+jB_C-$

$jB_C=G+jB=\underline{Y/\varphi}$ avendo posto $B=B_C-B_L$ L'ammettenza equivalente è dunque un numero complesso la cui parte reale è la conduttanza e la cui parte immaginaria è la suscettanza. Se la suscettanza è positiva l'ammettenza è capacitiva, induttiva se è negativa. Nella fig. 6.3 sono rappresentate le relazioni matematiche e grafiche

che definiscono l’ammettenza. Nel caso specifico della figura B, la suscettanza, quindi l’argomento sono positivi, l’ammettenza è dunque capacitiva e la corrente è in anticipo sulla tensione

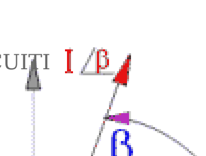


fig. 6. 3

Nella fig. 6.4 a è tracciato il diagramma vettoriale delle correnti per il parallelo. Si può osservare che quanto è stato detto per le tensioni e la corrente degli elementi in serie diventa valido per le correnti e la tensione degli elementi in parallelo. ;

Nota

Questa proprietà è tra l’altro nota come teorema di dualità: le leggi dei circuiti elettrici mantengono la loro validità quando contemporaneamente si sostituiscono le maglie con i nodi, gli elementi in serie con elementi in parallelo, le tensioni con le correnti, le impedenze con le ammettenze. Ne sono esempio gli stessi principi di

Kirchhoff.

Anche nel caso di elementi in parallelo si ha condizione di risonanza B_L=B_C che porta alla medesima espressione per la frequenza di risonanza. In condizioni di risonanza parallelo, le correnti sul condensatore e sull'induttore sono uguali ed in opposizione di fase, e l'intensità totale coincide con l'intensità sulla resistenza. Se si alimenta con un generatore di corrente di frequenza variabile ma di valore efficace costante, la tensione sul parallelo è massima alla frequenza di risonanza. Nella condizione di risonanza induttanza è capacità si scambiano completamente e continuamente l’energia accumulata. Per la dualità i grafici della fig. 6.2.c sono validi per il parallelo effettuando le sostituzioni X_L con B_C, X_C con B_L, Z con Y, I_{max}

con U_{max}, I con U.

;

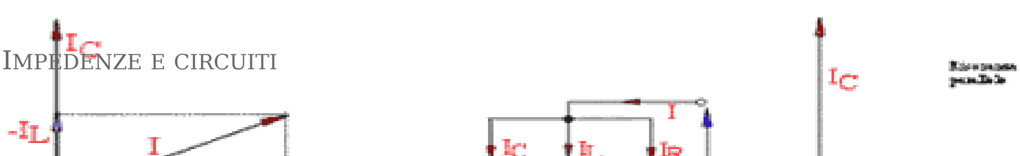


fig. 6.4

Nota l’ammettenza è per definizione nota anche l’impedenza. Se ci riferiamo alla rappresentazione polare di ammettenza ed impedenza, si può osservare che il modulo dell'impedenza è l'inverso del modulo dell'ammettenza e che l'argomento dell’impedenza è opposto all’argomento dell’ammettenza. Più elaborato è il legame tra resistenza e reattanza dell'impedenza serie con conduttanza e suscettanza dell’ammettenza del parallelo.Se è nota l’ammettenza si ha

$$\dot{Z}=\frac{1}{\dot{Y}}=\frac{1}{Y}\cdot\left(\cos(-\delta)+j\cdot\sin(-\delta)\right)=$$

$$=Z\cdot\left(\cos\theta+j\sin\theta\right)=R+jX=\frac{1}{Y}\cdot\frac{G}{Y}+j\frac{1}{Y}\cdot\frac{-B}{Y}=\frac{G}{Y^2}+j\frac{-B}{Y^2}$$

dunque $R = G/Y^{2,}$ $X = - B/Y^2$ (6.7). Se è nota l'impedenza, dualmente si ha $G = R/Z^{2,}$

$B = - X/Z^2$ (6. 8)

Vai

Circuiti R,C ed R, L

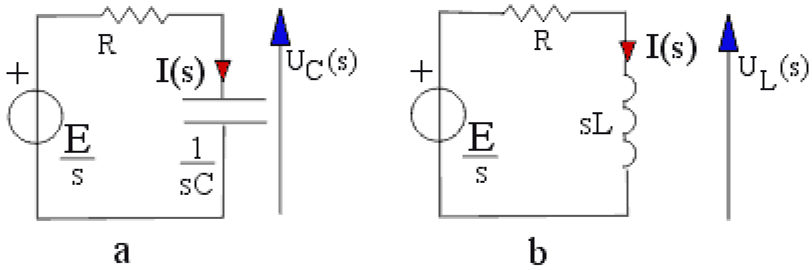


fig. 6. 11

Applicando il secondo principio di Kirchhoff alla rete di fig. 6.11.a

$I(s)\cdot(R+1/sC) = E/s$

$I(s)=E/(sR+1/C)=(E/R)/(s+1/RC)$

Posto

$K=E/R;\ a=1/RC$

si può ricavare

$i(t)=I_0\cdot e^{-t/RC}$

Al prodotto $t = R\cdot C$ si dà il nome di costante di tempo, $I_0=E/R$ è l'intensità di corrente nell'istante iniziale di applicazione della tensione. All'atto di applicazione della tensione il condensatore si comporta come un cortocircuito. L'intensità varia con legge esponenziale ed a regime si annulla: il condensatore è un circuito aperto.La tensione sul condensatore è per il II pdk :

$Uc(s)=E/s- (1/sC)\cdot I(s)=(E/s)\cdot(1-1/(sRC+1)$

Cui corrisponde nel tempo

$Uc(t)=E-E\cdot e^{-t/RC}=E(1- e^{-t/RC})$

Applicando il secondo principio di Kirchhoff alla rete di fig. 6.11.b

$I(s)\cdot(R+sL)=E/s$

La tensione sull'induttanza è

$U_L(s)=sL \cdot I(s)=E \cdot L/(R+sL)=E/(s+R/L)$

Da cui posto

k=E, a=R/L si ricava $u_L(t)=E \cdot e^{-(R/L)*t}$

L'intensità di corrente si può ricavare da

$I(s)=(E/s - UL(s))/R=(E/R)/s-(E/R)/(s+R/L)$

Da cui, nel tempo

$I(t)=E/R-(E/R) \cdot e^{-(R/L)*t}=E/R(1-e^{(-R/L)*t})$

L'intensità di corrente è dunque nulla nell'istante iniziale (l'induttore si comporta come un circuito aperto) e pari ad E/R a regime (l'induttore si comporta come un come un cortocircuito)

fig. 6. 12

Nella fig. 6.16 sono mostrati i grafici dell'andamento nel tempo di tensione e corrente nell'induttore e nel condensatore. I grafici sono come al solito normalizzati: in ascisse c'è il rapporto tra il tempo e la costante di tempo, in ordinate i rapporti tra i valori effettivi di corrente e tensione ed i loro valori di regime. Scambiando tensione con corrente si passa dal condensatore all'induttore, come era già implicito del resto nella caratteristica di definizione dei due bipoli esaminata nell'art. 2.

Conclusioni

Si è visto ; in questo articolo come, attraverso il concetto di impedenza, si possano estendere i metodi di studio descritti negli art. 3 e 4, ai circuiti in regime sinusoidale in particolare, con un cenno finale ai circuiti in regime comunque variabile.

Non si è voluto certamente affermare che si tratta di una semplice formalità matematica, ma sottolineare quanto importante sia la conoscenza accurata dei principi fondamentali ; poiché la matematica trova sempre il modo di adeguarvisi fornendo gli strumenti più adatti per analizzare la complessità che non deriva dai principi in sé, ma dall'interazione di molteplici elementi che devono a quei principi soddisfare.