Renzo DF (RenzoDF)

TEOREMA DI RENZO D. F.

1 May 2010

RENZO D.F., MEMBER, EP

Abstract

Extension of Millman's theorem.

Premessa

Nelle scorse settimane vedendo comparire nel forum il teorema di un "*Pisano*", del quale non ero proprio a conoscenza, mi sono *galvanizzato*; pur'io in fondo due anni di **Biomedica** a Pisa li avevo fatti e anche se ormai non collego più i temini "*scarico*" ad accumulatore e "*perdite*" a Joule, bensì a lavandini e guarnizioni, forse uno "straccio" di teorema potevo scriverlo; mi sono messo al lavoro e, grazie ad Isidoro che mi ha dato la possibilità di prendere visione del documento originale di **Millman**, mi son chiesto ...

... "*che sia possibile una sua estensione multinodale ?*" ...

Introduzione

Viene sviluppata una relazione risolutiva volta a determinare la differenza di potenziale fra due nodi di una rete lineare, in condizione di regime stazionario, che porta ad una estensione del teorema di **Millman** a reti a base trinodale; l'espressione è ovviamente più complessa ma, a mio parere, ancora **ingegneristicamente utile**.

Il vantaggio è rappresentato dal notevole risparmio di calcolo e soprattutto di tempo rispetto alle modalità risolutive tradizionali nonchè dalla facile memorizzazione ed applicazione.

La metodologia applicativa viene illustrata attraverso alcuni esempi applicativi relativi sia a reti in corrente continua sia in corrente alternata sia, *per continuità storica*, al circuito equivalente di un amplificatore a triodi.

Il Teorema

Assegnati due punti **H** e **K** di una rete lineare, collegati da un ramo della rete stessa, nei quali concorrano un arbitrario numero di impedenze **Zhi** e **Zkj**, noti i potenziali dei morsetti opposti delle stesse rispetto ad un riferimento comune **O**, si ricava una generica relazione per la determinazione della d.d.p. V_{HK} fra i suddetti punti.

Indicate con E0 e Z0 la f.e.m. e l'impedenza del ramo fra H e K, (E0 positiva se diretta da H verso K)

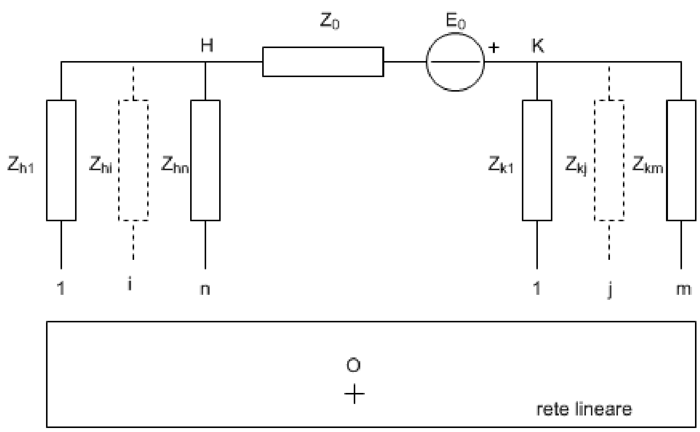

Fig. 1

applicando il principio di **Kirchhoff** alle correnti, ai nodi ad H e K, e posto

$$Z_{h0} = Z_{k0} = Z_0$$

otterremo, ricordando KCL e **Norton** ed usando le ammettenze **Y=1/Z**

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} (V_{hi} - V_H)Y_{hi} + (V_K - V_H)Y_0 - E_0 Y_0 = 0 \\ \sum\limits_{j=1}^{m} (V_{ki} - V_K)Y_{kj} + (V_H - V_K)Y_0 + E_0 Y_0 = 0 \end{cases}$$

che si potrà semplificare nel seguente sistema nelle incognite **VH** e **VK**

$$\begin{cases} V_H \sum_{i=0}^{n} Y_{hi} - V_K Y_0 = \sum_{i=1}^{n} V_{hi} Y_{hi} - E_0 Y_0 \\ -V_H Y_0 + V_K \sum_{j=0}^{m} Y_{kj} = \sum_{j=1}^{m} V_{kj} Y_{hi} + E_0 Y_0 \end{cases}$$

riscritto in forma matriciale corrisponderà a

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{n} Y_{hi} & -Y_0 \\ -Y_0 & \sum_{j=0}^{m} Y_{kj} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_H \\ V_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} V_{hi} Y_{hi} - E_0 Y_0 \\ \sum_{j=1}^{m} V_{kj} Y_{kj} + E_0 Y_0 \end{pmatrix}$$

ed infine, ricordando che

$$V_{HK} = V_H - V_K$$

la relazione cercata sarà esplicitabile come

$$V_{HK} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} V_{hi} Y_{hi} - E_0 Y_0\right) \sum_{j=1}^{m} Y_{kj} - \left(\sum_{j=1}^{m} V_{kj} Y_{kj} + E_0 Y_0\right) \sum_{i=1}^{n} Y_{hi}}{\sum_{i=0}^{n} Y_{hi} \sum_{j=0}^{m} Y_{kj} - Y_0^2} \qquad (1)$$

Si desidera sottolinare come, mentre a numeratore le sommatorie delle sole ammettenze abbiano indici "inferiori" **i=j=1**, a denominatore si abbia **i=j=0**, ad indicare che sono comprensive dell'elemento **Yh0=Yk0=Y0**.

Regola mnemonica

La regola mnemonica che si permetterà una facile applicazione sarà;

"La d.d.p. ***VHK*** *è pari al rapporto fra:*

- un numeratore costituito dalla differenza fra, prodotto delle "correnti di cortocircuito virtuali" dei rami collegati ad **H** per la somma delle ammettenze concorrenti in **K** (Y0 esclusa) ed il suo simmetrico relativo a **K**,

- un denominatore pari alla differenza fra il prodotto delle somme delle ammettenze in **H** e in **K** (Y0 compresa) ed il quadrato dell'ammettenza internodale **Y0**".

E' facile convincersi che, nel caso di coincidenza fra K e O, venendosi ad annullare tutte le Vkj, si viene ad annullare il secondo termine della differenza a numeratore, mentre a denominatore l'uguagliarsi delle due sommatorie (m=n) porterà a semplificare la relazione nella classica formula di **Millman**

$$V_{HO} = \frac{\sum_{i=1}^{n} V_{hi} Y_{hi} \sum_{j=0}^{m} Y_{kj}}{\left(\sum_{j=0}^{m} Y_{kj}\right)^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} V_{hi} Y_{hi}}{\sum_{i=1}^{n} Y_{hi}}$$

che sarà quindi un caso particolare della (1).

Esempi applicativi

E veniamo alla parte più interessante dell'articolo, ovvero come si applica quel "*formulone*" ad una rete reale ?

Niente di più semplice, vediamone alcuni esempi:

- **una rete in corrente continua trinodale**

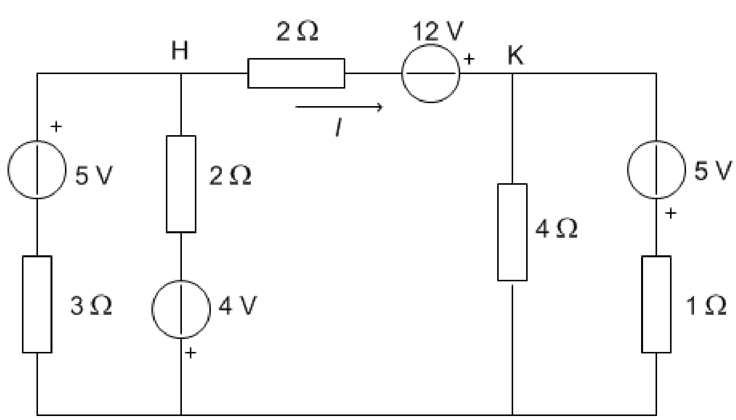

Fig. 2

Sostituendo nella formula i valori dei parametri circuitali della rete otteniamo

$$V_{HK} = \frac{\left(\frac{5}{3} - \frac{4}{2} - \frac{12}{2}\right) \times \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{1}\right) - \left(-\frac{5}{1} + \frac{12}{2}\right) \times \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = -\frac{105}{25} = -\ 4,2\ \mathrm{V}$$

$$I = (V_{HK} + E_0)\, Y_0 = \left(-\frac{105}{25} + 12\right) \times \frac{1}{2} = 3,9\ \mathrm{A}$$

- **una rete con ramo parallelo**

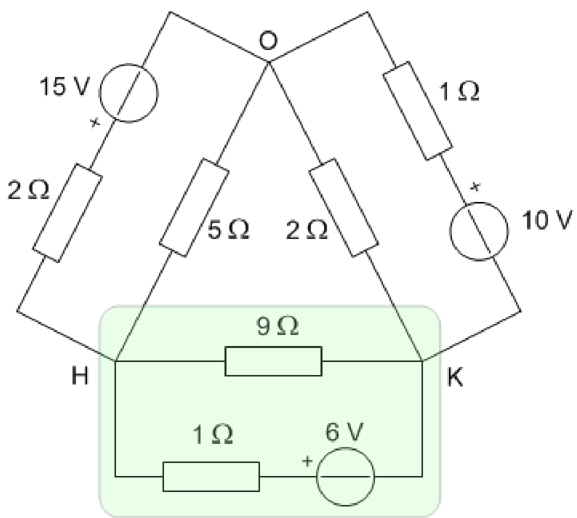

Fig. 3

In questo caso, basterà considerare l'ammettenza **Y0** come somma delle due ammettenze della sottorete in verde

$$Y_0 = \frac{1}{9} + 1 = \frac{10}{9}\ \mathrm{S}$$

mentre la corrente di corto virtuale rimarra pari a **6/1= 6 A** e la tensione sarà

$$V_{HK} = \frac{\left(\frac{15}{2} + 6\right) \times \left(\frac{1}{2} + 1\right) - (-10 - 6) \times \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{10}{9}\right) \times \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{10}{9}\right) - \left(\frac{10}{9}\right)^2} = 9\ \mathrm{V}$$

NB Si capisce come sia, in generale, possibile estendere questo caso particolare ad un superiore numero di rami in parallelo fra H e K

$$Y_0 = \sum_v Y_{hkv}$$
$$J_0 = \sum_u E_{hku} Y_{hku}$$

- **una rete trifase pentanodale**

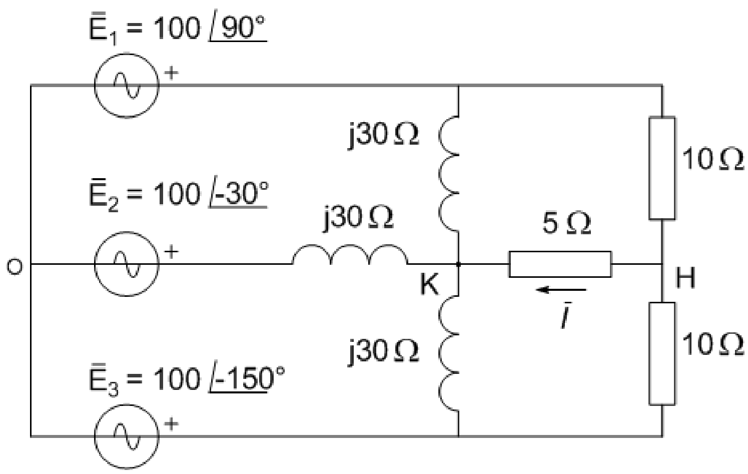

Fig. 4

che porta immediatamente a

$$V_{HK} = \frac{\left(\frac{j100}{10} + \frac{-50\sqrt{3}-j50}{10}\right) \times \left(\frac{3}{j30}\right) - (0) \times \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10}\right)}{\left(\frac{1}{j10} + \frac{1}{5}\right) \times \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1}{5}\right)^2} =$$
$$= \frac{25}{4}\left[(\sqrt{3}-1) - j(\sqrt{3}+1)\right] \approx 4,58 - j17,1 \text{ V}$$

e la corrente

$$I = V_{HK} Y_0 = \frac{5}{4}\left[(\sqrt{3}-1) - j(\sqrt{3}+1)\right] \approx 0,915 - j3,42 \, \text{A}$$

NB Si noti come, pur essendo in presenza di cinque nodi, sia ancora possibile applicare la (1) grazie alla "*virtualità*" dei due nodi, superiore ed inferiore destro, della rete, eliminabili con uno sdoppiamento dei generatori E1 ed E3.

.

Un ultimo Esempio Simbolico

Come ultimo esempio, prendendo in prestito il quarto esempio applicativo (**g**) del documento di **Millman** [1], consistente in un amplificatore a doppio triodo per audio-frequenza; mettiamo alla prova la relazione (1) per ricavare il guadagno del primo stadio

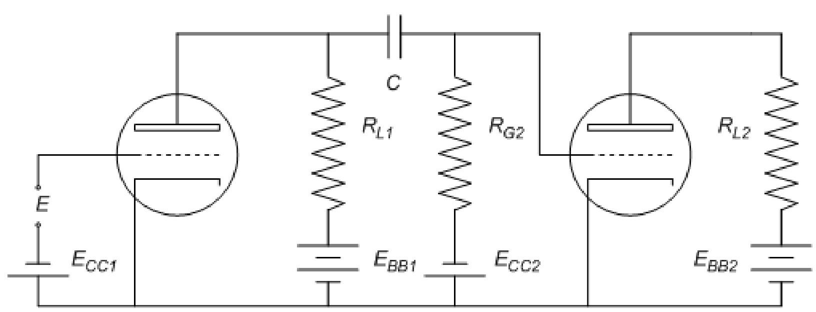

Fig. 5

la rete viene rappresentata con il seguente circuito equivalente

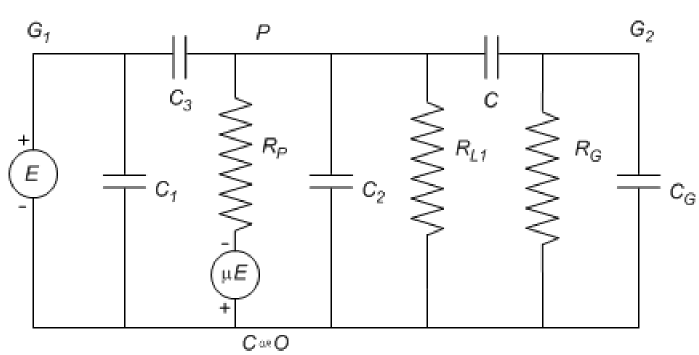

Fig. 6

Millman deve ovviamente applicare per due volte in successione il suo teorema [2], e ipotizzare delle semplificazioni per non appesantire il calcolo, mentre ora con la relazione (1) potremo scrivere direttamente il guadagno **K** ricordando che sarà pari a

$$K = \frac{V_{G2O}}{E} = \frac{V_{PG2}}{E} \cdot \frac{Y_C}{Y_{Rg} + Y_{Cg}}$$

e quindi

$$K = \frac{(EY_3 - \mu EY_P)(Y_{Rg} + Y_{Cg})}{(Y_3 + Y_P + Y_2 + Y_L + Y_C)(Y_{Rg} + Y_{Cg} + Y_C) - Y_C^2} \cdot \frac{Y_C}{E\,(Y_{Rg} + Y_{Cg})}$$

semplificabile in

$$K = \frac{Y_C\,(Y_3 - \mu Y_P)}{Y_C(Y_3 + Y_P + Y_2 + Y_L) + (Y_3 + Y_P + Y_2 + Y_L + Y_C)(Y_{Rg} + Y_{Cg})}$$

sviluppando e fatte vere le ipotesi semplificative assunte da **Millman**

$$Y_3 \ll \mu Y_P = G_m \;,\quad Y_3 \ll Y_C \quad,\quad Y_2 \ll Y_C$$

otterremo la stessa relazione finale **!**

$$K = \frac{-Y_C G_m}{Y_C(Y_P + Y_L + Y_{Rg} + Y_{Cg}) + (Y_P + Y_L)(Y_{Rg} + Y_{Cg})}$$

.

Bibliografia

[1] Jacob Millman, A Useful Network Theorem, 1940.

Purtroppo il documento linkato non è scaricabile gratuitamente, è comunque disponibile un breve estratto nella sezione Elettrotecnica del forum

[2] Renzo D. F. , Cos'è il teorema di Millman, 2010.

Estratto da "http://www.electroyou.it/mediawiki/index.php?title=UsersPages:Renzodf:articolo22"