Massimo Benenati (MassimoB)

APPUNTI DI TRIGONOMETRIA

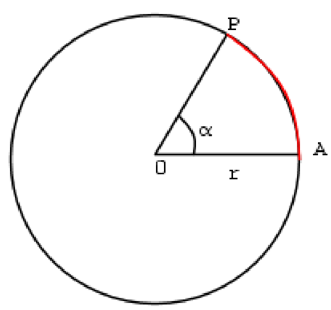
22 November 2015

Prefazione

Non molto tempo fa trovandomi a studiare matematica per gli esami di analisi dopo anni dalle scuole superiori una delle tante difficoltà che ho incontrato per prime è stata il ripasso di trigonometria, così ho pensato di condividere una serie di appunti che potrebbero essere utili a chi come me si trova o si troverà ad affrontare tali studi o semplicemente ha voglia di rinfrescare la memoria sugli argomenti che tratterò.

Il radiante

Prima di tutto definiamo cosa è un radiante, unità di misura che ci accompagnerà a lungo negli studi.
Un radiante è definito come la misura dell' angolo al centro $\widehat{AOP}$ quando l' arco AP ha una lunghezza pari al raggio r della circonferenza.
Da cui si deduce che un angolo di 360° sottende un arco pari a $2\pi r$



Per convertire gradi in radianti basta utilizzare la seguente proporzione:

$$g : r = 180 : \pi$$

Dove g è l' angolo in gradi ed r l' angolo in radianti

Se abbiamo un angolo in gradi e vogliamo convertirlo in radianti avremo:

$$r = \frac{g\pi}{180}$$

Se abbiamo un angolo in radianti e vogliamo convertirlo in gradi avremo:

$$g = \frac{r180}{\pi}$$

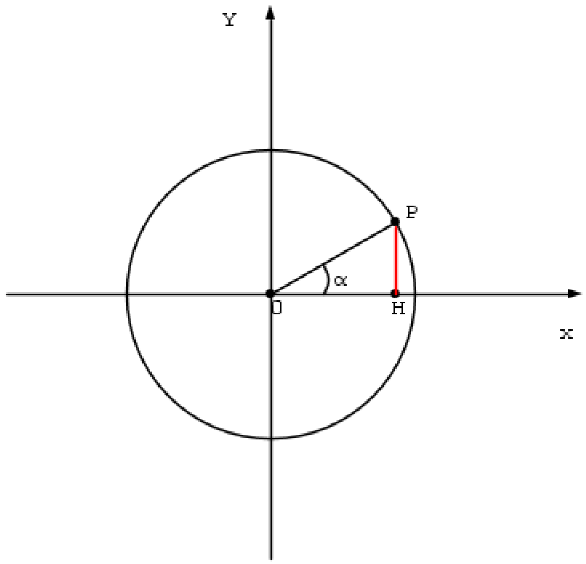
Di seguito ho riportato la tabella di conversione di alcuni angoli ricorrenti

Angoli in gradi	**Angoli in radianti**
0°	0
15°	$\frac{\pi}{12}$
30°	$\frac{\pi}{6}$
45°	$\frac{\pi}{4}$
60°	$\frac{\pi}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$
180°	π
270°	$\frac{3\pi}{2}$
360°	2π

La circonferenza trigonometrica

Consideriamo ora una circonferenze di raggio unitario e centro nell' orgine degli assi X e Y, tale circonferenza viene chiamata Circonferenza trigonometrica.

Consideriamo ora un punto P posizionato su di essa



Proiettiamo il punto P sull' asse delle ascisse e lo chiamiamo H.

Il segmento $\overline{OH}$ rappresenta il coseno dell' angolo $H\widehat{O}P$

Il segmento $\overline{HP}$ rappresenta il seno dell' angolo $H\widehat{O}P$

Notiamo anche che il punto P sulla circonferenza ha coordinate $P(cos\alpha, sin\alpha)$

A questo punto introduciamo il concetto di tangente e cotangente

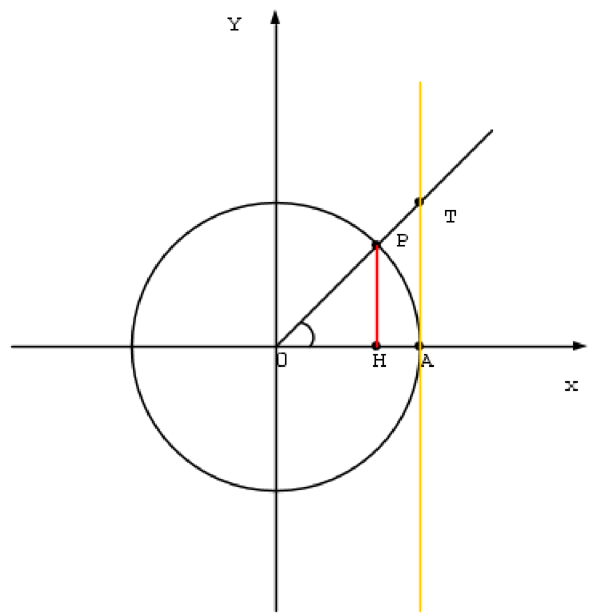
Il segmento $\overline{AT}$ rappresenta La tangente dell' angolo $H\widehat{O}P$

Il segmento $\overline{BS}$ rappresenta La cotangente dell' angolo $H\widehat{O}P$

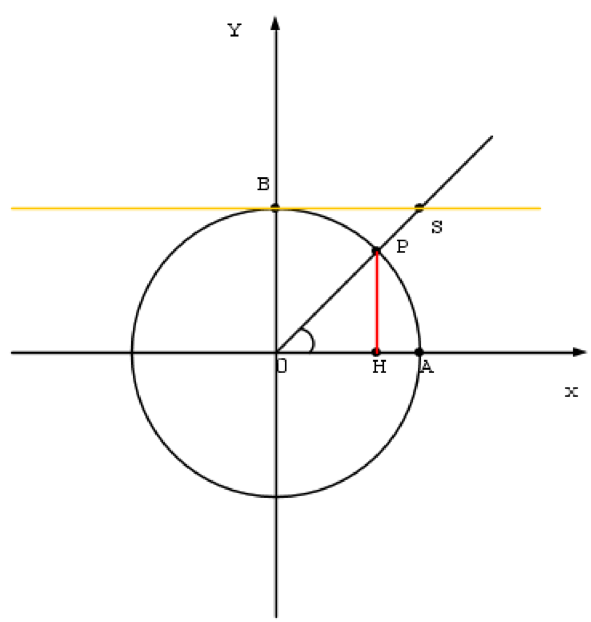
$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Tangente

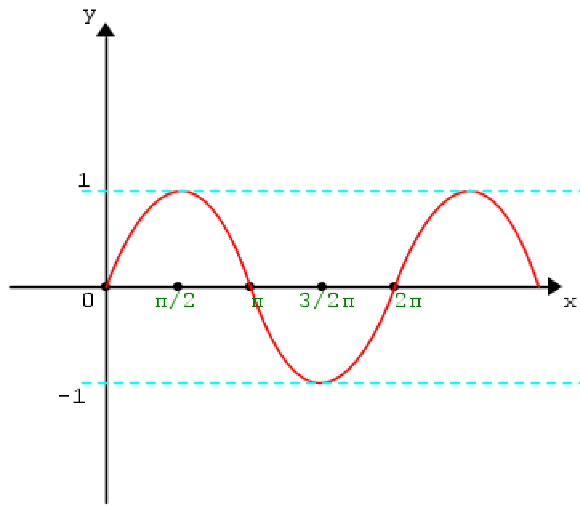


Cotangente



La funzione seno

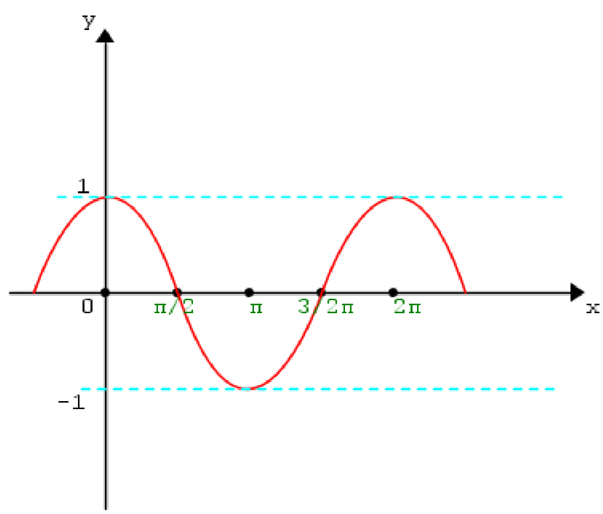
$f(x) = \sin x$



La funzione seno è periodica di periodo 2π

La funzione coseno

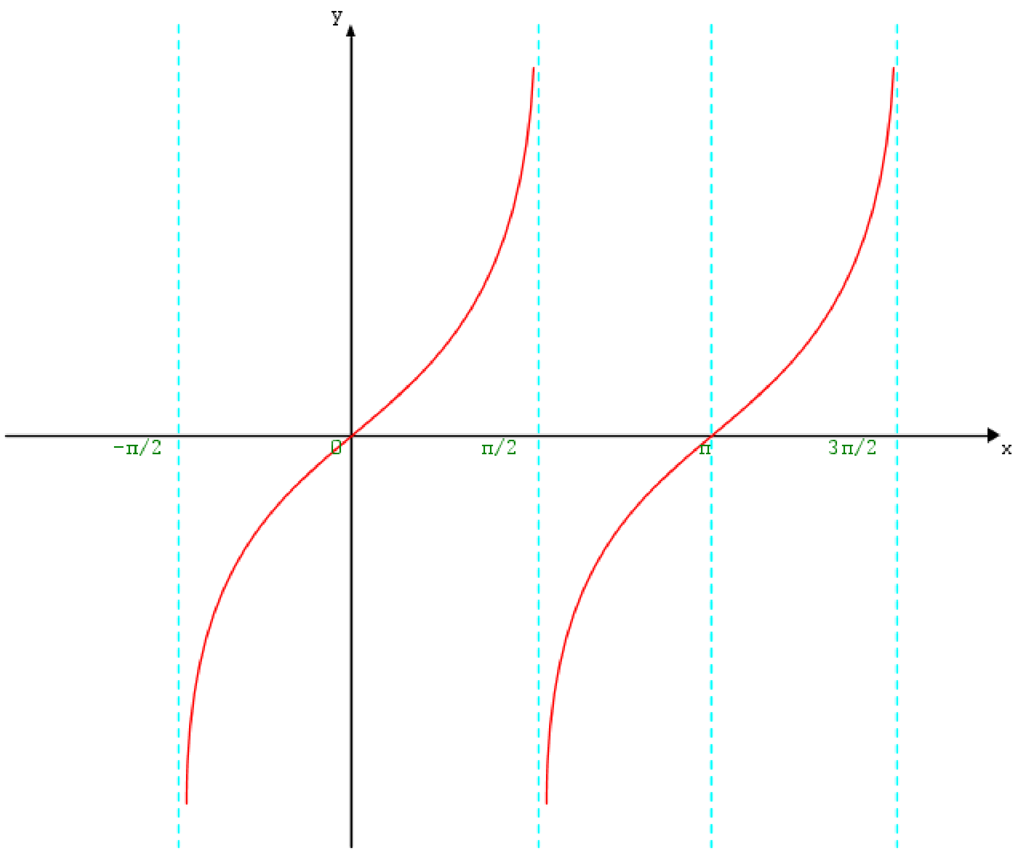
$f(x) = \cos x$



La funzione coseno è periodica di periodo 2π

La funzione tangente

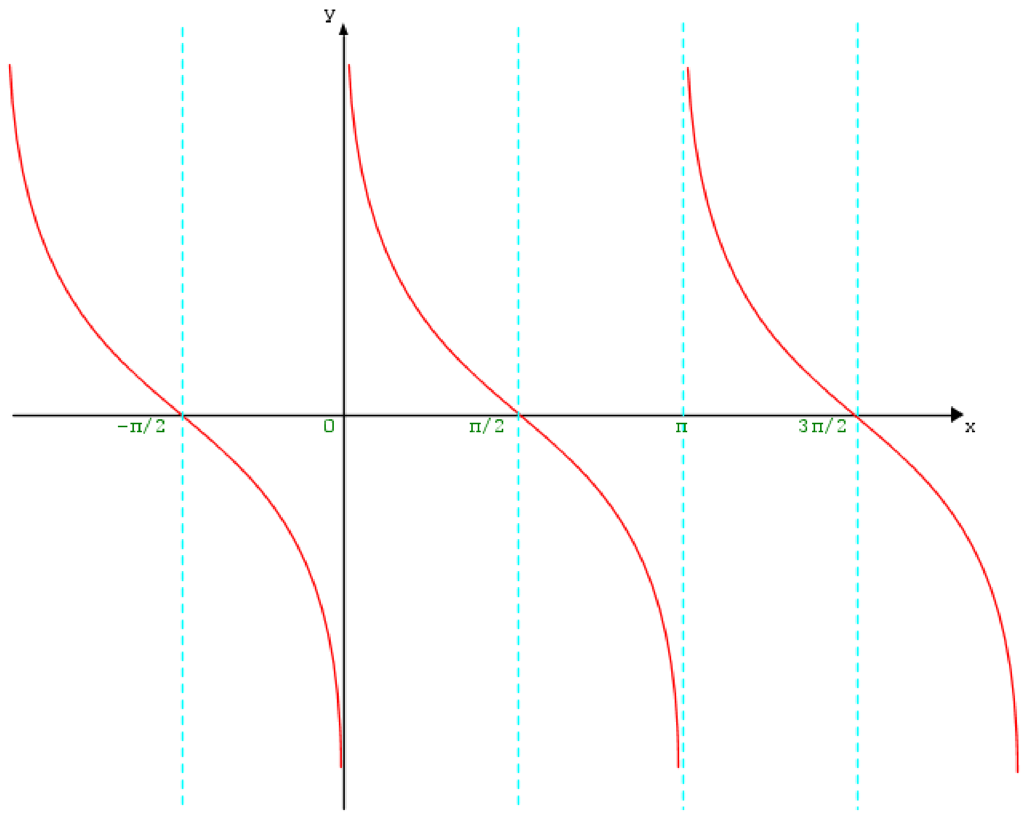
$f(x) = \tan x$



La funzione tangente è periodica di periodo π

La funzione cotangente

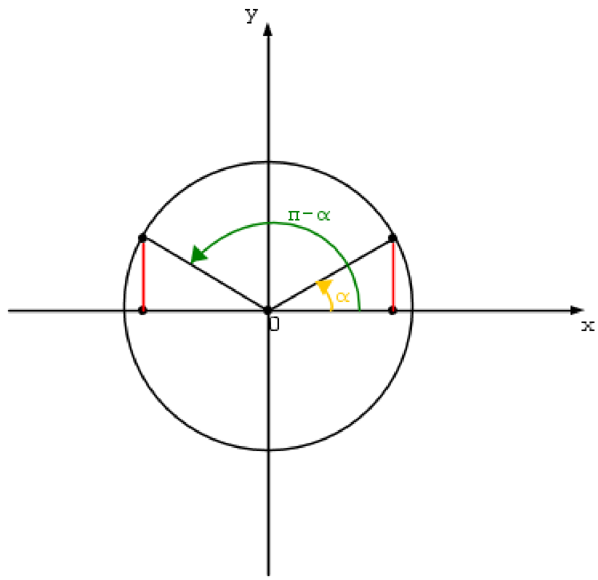
$f(x) = \cot x$



La funzione cotangente è periodica di periodo π

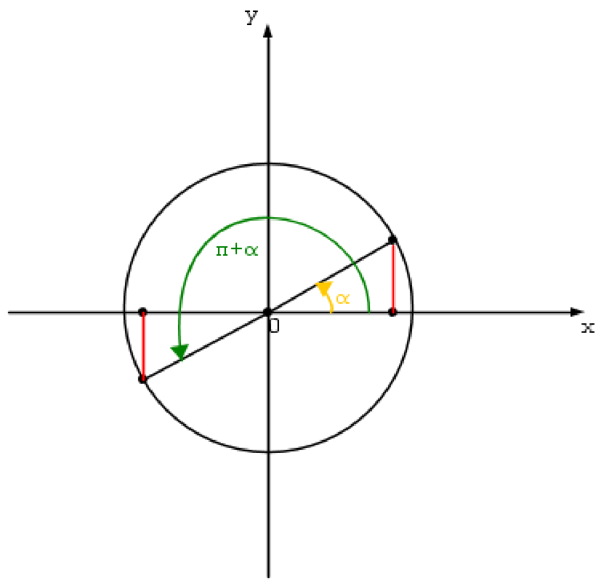
Gli archi associati

π - α



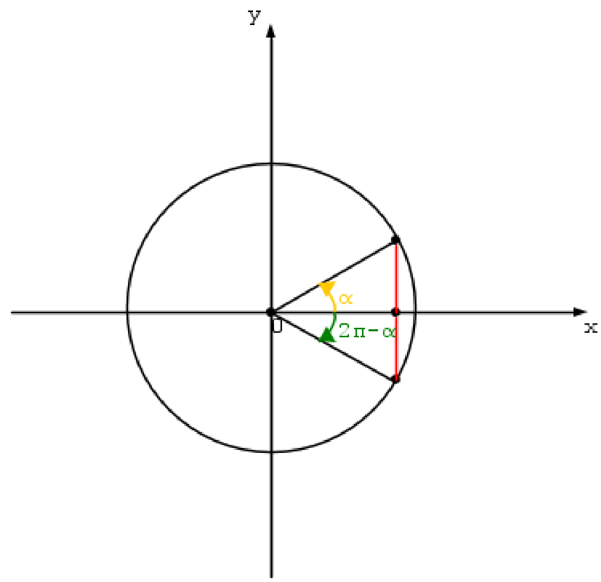
$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$
$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$
$\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$
$\cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha$

π + α



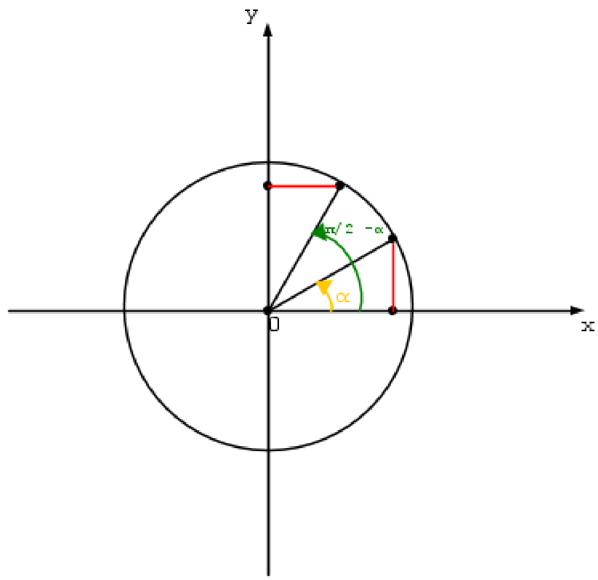
$\sin(\pi + \alpha) = - \sin\alpha$
$\cos(\pi + \alpha) = - \cos\alpha$
$\tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha$
$\cot(\pi + \alpha) = \cot\alpha$

2π - α



$\sin(2\pi - \alpha) = -\sin\alpha$
$\cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha$
$\tan(2\pi - \alpha) = -\tan\alpha$
$\cot(2\pi - \alpha) = -\cot\alpha$

π/2 - α



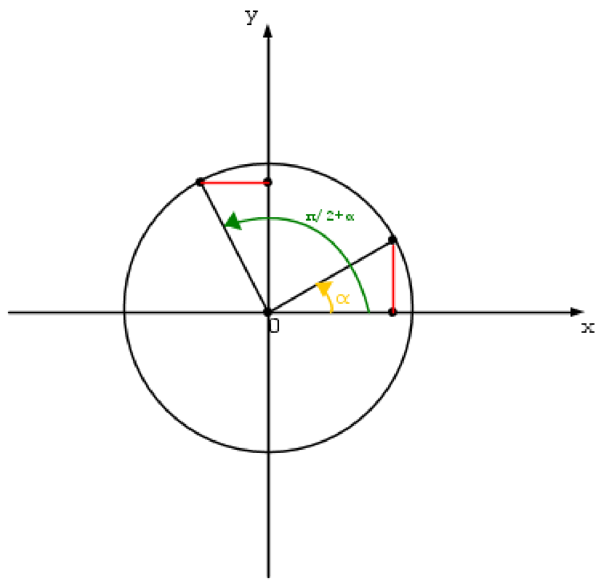
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\tan\alpha$$

π/2 + α



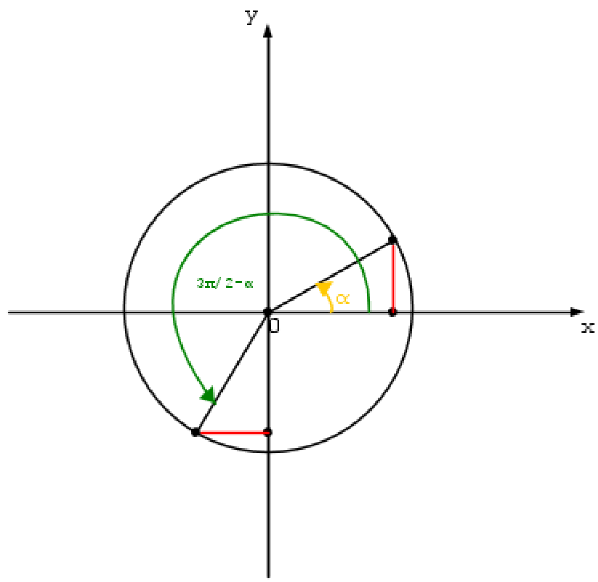
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\cot\alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\tan\alpha$$

3π/2 - α



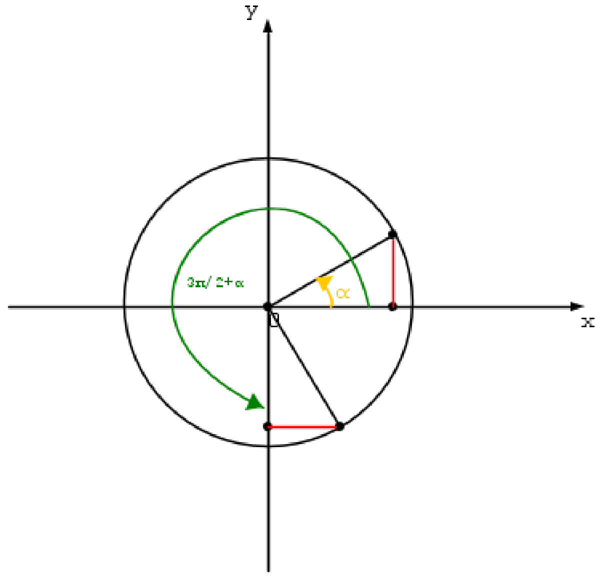
$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha$$

$$\cot\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\tan\alpha$$

3π/2 + α



$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) = -\cos\alpha$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) = \sin\alpha$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) = -\cot\alpha$$

$$\cot\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) = -\tan\alpha$$

Angoli ricorrenti

Angoli in gradi	Angoli in radianti	Seno	Coseno	Tangente	Cotangente
0°	0	0	1	0	∞
15°	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$

30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	∞	0
180°	π	0	-1	0	∞
270°	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	∞	0
360°	2π	0	1	0	∞

Un pò di formule

Prima relazione fondamentale

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Formule di addizione

seno della somma

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

seno della differenza

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

coseno della somma

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

coseno della differenza

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

tangente della somma

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

tangente della differenza

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

Formule di duplicazione

seno del doppio dell' angolo

$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$

coseno del doppio dell' angolo

$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

tangente del doppio dell' angolo

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

Formule di bisezione

seno della metà di un angolo

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}$$

coseno della metà di un angolo

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

tangente della metà di un angolo

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

Formule Parametriche

Posto
$t=\tan\frac{\alpha}{2}$

formula parametrica del seno

$$\sin\alpha=\frac{2t}{1+t^2}$$

formula parametrica del coseno

$$\cos\alpha=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

formula parametrica della tangente

$$\tan\alpha=\frac{2t}{1-t^2}$$

Formule di prostaferesi

somma di seni

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

differenza di seni

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

somma di coseni

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

differenza di coseni

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Formule di werner

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right)$$

$$\cos\alpha cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right)$$

$$\sin\alpha cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right)$$

Bibliografia

Matematica di base di Giacomo Tommei Edizioni Apogeo
Matematica per i precorsi di Giovanni malafarina Edizioni McGraw-Hill
Istituzioni Di Matematiche di Giuseppe Zwirner Edizioni Cedam
Analitica e trigonometria di Giuseppe Zwirner Edizioni Cedam
Matematica generale di Romano Isler Edizioni Goliardiche
Manuale di metodi matematici di Allevi,Bertocchi,Birolini,Carcano,Gnudi,Moreni Edizioni

Giappichelli
PreCalculus di Marco Bramanti Edizioni Esculapio
Elementi di matematica - Questioni fondamentali di Giorgio Giorgi Edizioni Giappichelli