Giovanni Schgör (g.schgor)

SOLUZIONE DI UN INSOLITO CIRCUITO RC

9 September 2008

IL PROBLEMA

Dato un circuito serie composto da una resistenza R e da 2 condensatori C1 e C2, il tutto alimentato con una tensione a gradino da 0 a VA, determinare l'andamento nel tempo delle tensioni ai capi dei 2 condensatori, ed in particolare i valori delle tensioni alla fine del transitorio.

Per essere concreti, assumiamo VA=12V, R=10 Kohm, C1=100 uF, C2=20 uF.

SOLUZIONE CONVENZIONALE

Per l'equilibrio dei valori istantanei del circuito serie, vale l'equazione:

$$va(t) = R \cdot i + \left(\frac{1}{C1} + \frac{1}{C2}\right) \int_0^t i \cdot dt$$

dove $va(t)$ e' l'andamento nel tempo del segnale applicato (gradino) ed i l'andamento sempre nel tempo della corrente che percorre il circuito, cioe' la funzione incognita da ricavare.

Applicando il metodo di Laplace (e ricordando che la trasformata di un gradino è 1/s), l'equazione può essere trasformata in :

$$\frac{VA}{s} = R \cdot i + \left(\frac{1}{C1} + \frac{1}{C2}\right) \cdot \frac{i}{s}$$

che ci permette di trovare la trasformata in s della corrente, cioè i(s).

Se per comodità poniamo $\frac{1}{C} = \frac{1}{C1} + \frac{1}{C2}$ (dove ovviamente C rappresenta il condensatore equivalente ai 2 in serie) ricaviamo infatti

$$i(s) = \frac{VA \cdot C}{R \cdot C \cdot s + 1}$$

che antitrasformata dà la i(t) cercata:

$$i(t) = \frac{VA}{R} e^{-\frac{t}{R \cdot C}}$$

E' infine evidente che gli andamenti cercati delle tensioni ai capi di C1 e C2 sono rispettivamente $vc1(t) = \frac{1}{C1} \int_0^t i(t) \cdot dt = \frac{VA}{R \cdot C1} \int_0^t e^{-\frac{t}{R \cdot C}} \cdot dt$

$$vc2(t) = \frac{1}{C2} \int_0^t i(t) \cdot dt = \frac{VA}{R \cdot C2} \int_0^t e^{-\frac{t}{R \cdot C}} \cdot dt$$

Risolvendo quindi gli integrali, risulta:

$$vc1(t) = VA \cdot \frac{C}{C1} \left(1 - e^{-\frac{t}{R \cdot C}}\right)$$

$$vc2(t) = VA \cdot \frac{C}{C2} \left(1 - e^{-\frac{t}{R \cdot C}}\right)$$

Gli andamenti nel tempo sono quindi esponenziali con la stessa costante di tempo, ma con valori finali diversi:

$$vc1(\infty) = VA \cdot \frac{C}{C1}$$

$$vc2(\infty) = VA \cdot \frac{C}{C2}$$

Con i dati numerici forniti, risultano rispettivamente 2V e 10 V (si noti la proporzionalità inversa rispetto ai valori di capacità)

SOLUZIONE CON LE DIFFERENZE FINITE

Tutto il procedimento ora visto può essere evitato ricorrendo al metodo delle differenze finite (vedi articolo)

Partendo dalle stessa equazione iniziale, possiamo differenziarla ottenendo:

$$0 = R \cdot \frac{di}{dt} + \left(\frac{1}{C1} + \frac{1}{C2}\right) \cdot i$$

con la condizione iniziale: $i(0) = \frac{VA}{R}$

Applicando ora le differenze finite, risulta:

$$0 = R \cdot \frac{i(t+1) - i(t)}{\Delta t} + \left(\frac{1}{C1} + \frac{1}{C2}\right) \cdot i(t)$$

da cui si può ricavare

$$i(t+1) = i(t) \cdot \left(1 - \frac{\Delta t}{R} \cdot \left(\frac{1}{C1} + \frac{1}{C2}\right)\right)$$

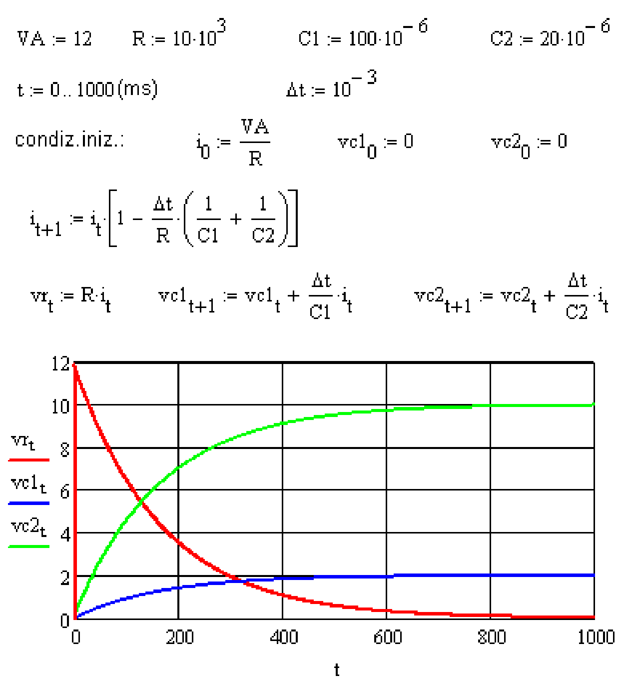
cioè ad una struttura ricorsiva di calcolo che permette di determinare il valore di i ad ogni istante t.

Con questo è immediatamente possibile ricavare l'andamento delle tensioni cercate:

$$vc1(t+1) = vc1(t) + \frac{\Delta t}{C1} \cdot i(t)$$

$$vc2(t+1) = vc2(t) + \frac{\Delta t}{C2} \cdot i(t)$$

Ed ecco la semplice implementazione in MathCad:



RCC.GIF

Per maggior chiarezza e' stato aggiunto l'andamento della tensione su R, vr, proporzionale al valore della corrente. Il grafico mostra che, ovviamente, la somma delle 3 tensioni è in ogni istante uguale a VA.