



EdmondDantes

CALCOLO DELLA CAPACITÀ DI UN CONDENSATORE. UNA APPLICAZIONE DEL METODO DEI MOMENTI.

17 August 2018

Introduzione

La prima parte di questa memoria presenta una breve spiegazione dei fenomeni elettrostatici e circuitali in modo da introdurre il concetto di *capacità dielettrica e condensatore*.

Nella seconda parte, invece, viene presentata una spiegazione del *metodo dei momenti* e una sua applicazione pratica per il calcolo della capacità di un condensatore piano.

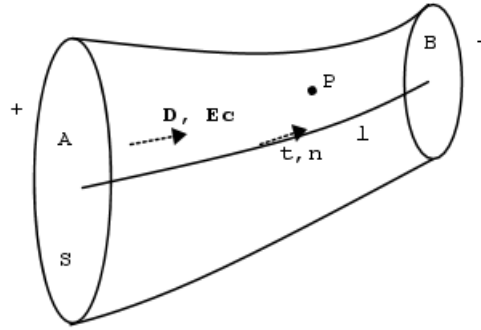
Prima parte - Modello circuitale del condensatore

Tubi di flusso dello spostamento elettrico e condensatore

Per studiare i fenomeni dielettrici dal punto di vista circuitale e' necessario considerare l'ipotesi *elettrostatica* e i tubi di flusso del vettore spostamento elettrico $\mathbf{D}(P, t)$. Nei mezzi dielettrici ordinari la permittività relativa varia nell'intervallo $1 \div 8$ (aria-marmo), pertanto il solo fenomeno della rifrazione non e' in grado di confinare le linee vettoriali dello spostamento elettrico.

Il confinamento dei fasci del vettore \mathbf{D} dipende in primo luogo dalla distribuzione delle cariche spaziali libere che individuano regioni delimitate dello spazio entro cui le linee di \mathbf{D} sono canalizzate.

All'interno di queste regioni (mezzo lineare ed isotropo) e' possibile individuare porzioni di spazio in cui $\nabla \cdot \mathbf{D}(P, t) = 0$, permettendo di considerare il tubo di flusso di $\mathbf{D}(P, t)$. Date le condizioni elettrostatiche, il tubo di flusso non e' chiuso in quanto le linee di \mathbf{D} nascono e muoiono in corrispondenza delle cariche libere presenti al di fuori del tubo stesso.



All'interno del tubo di flusso e' presente anche il campo coulombiano E_c .

Si definisce **capacità dielettrica** del tubo di flusso di D il rapporto:

$$C_{AB} = \frac{\int_{S_t} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS}{\int_{S_{AB}} \mathbf{E}_c \cdot \mathbf{t} dl} = \frac{\Theta}{V_{AB}}$$

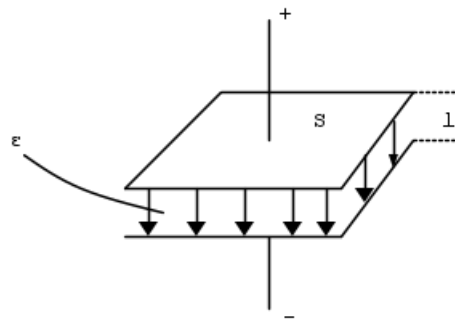
e si misura in *farad* [F].

Una struttura tipica in grado di realizzare tale situazione e' il *condensatore*, costituito da due conduttori, detti *armature*, con interposto uno o più mezzi dielettrici.

Sulle armature sono depositate le cariche elettriche libere uguali ed opposte.

Il condensatore piano con dielettrico uniforme

E' un condensatore con elevata simmetria costituito da due armature piane e parallele di uguale superficie poste a distanza l e con interposto un mezzo dielettrico uniforme con costante dielettrica ϵ , come rappresentato nella figura seguente:



Trascurando gli effetti ai bordi delle armature (in pratica si considera omogenea la distribuzione delle cariche nelle due armature) la capacità del condensatore piano vale:

$$C = \frac{\epsilon S}{l} \quad (1)$$

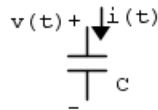
In queste condizioni ideali, i campi sono nulli esternamente alle due armature.

Il modello bipolare del condensatore

Nelle condizioni di idealità e ipotesi assunte in questa memoria, il tronco di flusso di $\mathbf{D}(P, t)$ può essere considerato come un bipolo, caratterizzato dalla relazione $q_A(t) = C v_{AB}(t)$.

In particolare, il bipolo condensatore è caratterizzato da una superficie chiusa al di fuori della quale lo spostamento elettrico è nullo ovunque e in ogni istante di tempo, dalla tensione tra i terminali $v_{AB}(t)$ e dalle correnti ai terminali $i(t)$.

Il simbolo utilizzato in elettrotecnica per individuare il bipolo condensatore è il seguente:



In generale, nelle diverse applicazioni pratiche e teoriche, salvo studi di carattere specifici, il condensatore si ritiene indeformabile dal punto di vista meccanico; la deformazione della geometria del condensatore, comunque, comporta la variazione della capacità del condensatore.

Seconda parte - Il metodo dei momenti (MoM) e il calcolo della capacità di un condensatore piano

Il metodo dei momenti (MoM)

Il metodo dei momenti, relativamente ai problemi elettromagnetici, è stato descritto per la prima volta da R. F. Harrington nel suo libro, ormai diventato un classico, *Field Computation by Moment Methods*, edito da Krieger Publishing Co., Inc. nel 1968.

È utilizzato soprattutto per studiare la risposta elettromagnetica delle antenne o di altre strutture metalliche (*radiation and scattering problems*).

L'approccio generale individua il metodo dei momenti con gli operatori e gli spazi lineari, considerando la relazione:

$$L(f) = g$$

ove:

- f è una funzione di tipo integrale o differenziale. Nei problemi elettromagnetici rappresenta la risposta alle sollecitazioni;

- g è il termine noto. Nei problemi elettromagnetici rappresenta l' eccitazione (tensioni, correnti o campi);
- L è un operatore che opera su f (f è il dominio di L).

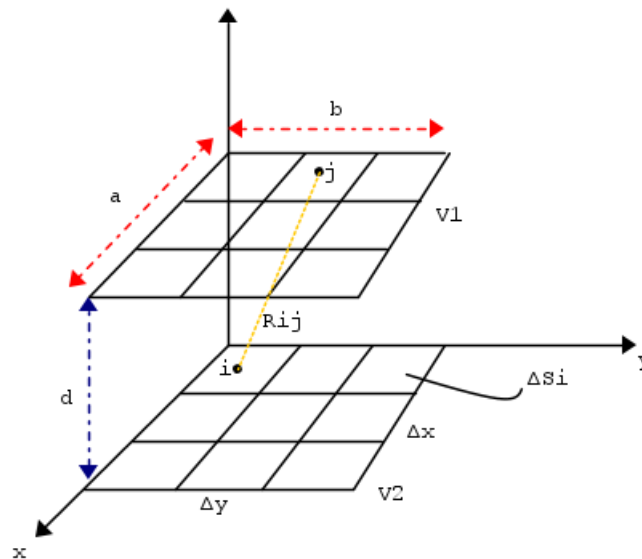
L'applicazione pratica di questo metodo numerico è presentata nel prossimo paragrafo, calcolando la capacità di un condensatore piano, costituito da due piatti conduttori paralleli di spessore trascurabile e posti a distanza d (problema bidimensionale).

Si metterà in evidenza che, quando non è possibile trascurare gli effetti dei bordi, il valore della capacità calcolata secondo la (1) introduce errori inaccettabili, soprattutto per applicazioni a frequenza elevata.

Il calcolo della capacità di un condensatore piano

Come anticipato, il problema da risolvere è il calcolo della capacità di un condensatore piano a facce piane e parallele di lati $0,5 \text{ m} \times 0,5 \text{ m}$ posti alla distanza di 5 cm in aria. Sulla armatura superiore è impresso un potenziale costante pari a 1 V , mentre l'armatura inferiore è mantenuta a -1 V (d.d.p. pari a 2 V).

Lo schema bidimensionale con la discretizzazione delle armature è presentato nella figura seguente:



Per determinare la densità superficiale di carica σ sulle armature, si divide ciascuna armatura in n sezioni (in totale si hanno $2n$ elementi superficiali), determinando $2n$ superfici ΔS elementari.

Il potenziale dell'armatura V_i al centro della generica sezione elementare vale:

$$V_i = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\sigma dS}{R} \approx \sum_{j=1}^{2n} \sigma_j A_{ij}$$

Il generico coefficiente A_{ij} vale:

$$A_{ij} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{\Delta S_j} \frac{dS_j}{R_{ij}} \quad (2).$$

In forma matriciale il problema si scrive:

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{v},$$

da cui si ottiene:

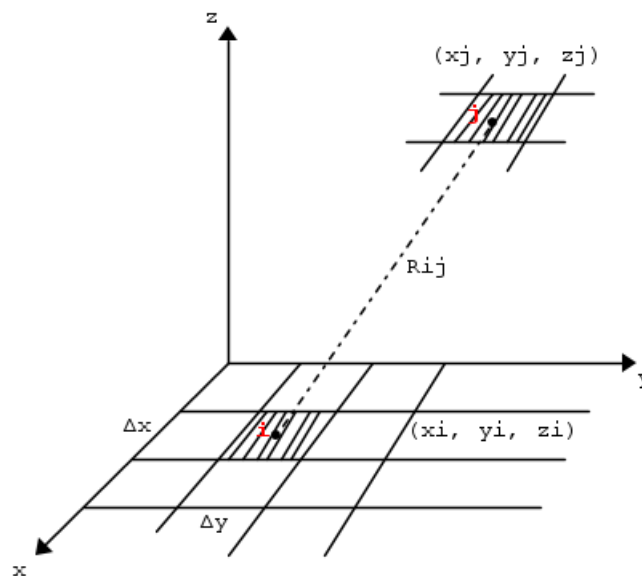
$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{v}$$

costituendo un sistema di $2n$ equazioni in $2n$ incognite σ . Il vettore \mathbf{v} e' il vettore dei potenziali (i primi n elementi sono pari a V_1 e i restanti pari a V_2), \mathbf{A} e' la matrice dei coefficienti di auto e mutua influenza $2n \times 2n$ simmetrica, i cui elementi sono stati definiti in (2).

Le distanze R_{ij} fra i baricentri delle singole celle elementari della sezione sorgente e della sezione osservazione valgono:

$$R_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}$$

calcolate sulla base della figura seguente:



I coefficienti A_{ij} di mutua e auto influenza valgono:

$$A_{ij} = \begin{cases} \frac{\Delta l^2}{4\pi\epsilon R_{ij}} & \text{per } i \neq j \\ \frac{\Delta l \ln(1+\sqrt{2})}{\pi\epsilon} & \text{per } i = j \end{cases}$$

assumendo quadrata ciascuna sezione elementare, di lato pari a Δl .

Implementazione e risultato

L'algoritmo presentato e' stato implementato in linguaggio [Python](#) (interprete Python 3.6.5), utilizzando le librerie esterne [NumPy](#) e [Matplotlib](#).

Con i dati riportati all'inizio di questa seconda parte e suddividendo ogni singola armatura in 400 celle quadrate elementari, l'algoritmo restituisce un valore di capacita' pari a

$$C = \frac{Q}{|V_1 - V_2|} = 58,12 \text{ pF}$$

La carica Q e' calcolata sommando i primi n elementi del vettore σ (prima armatura) e moltiplicando il valore ottenuto per l'area di una singola cella elementare.

Le figure seguenti mostrano le densità di carica sull'armatura superiore e inferiore:

Densita' di carica sull'armatura superiore (pC/m2)

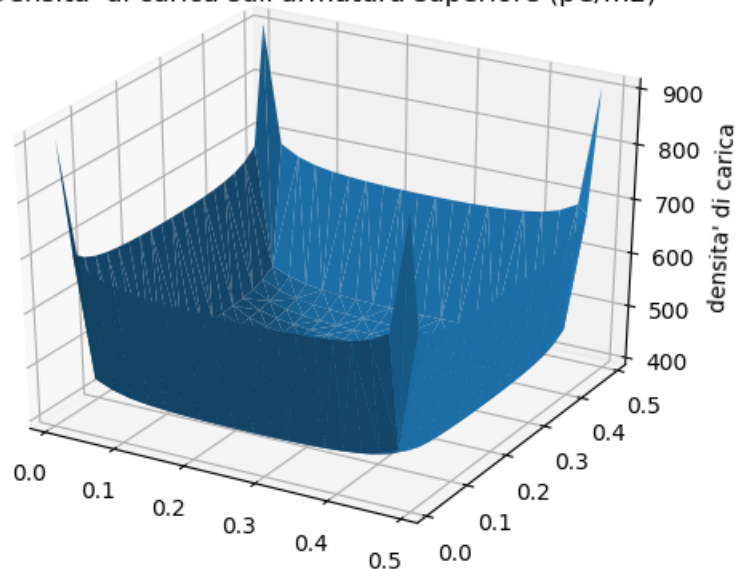


figura1.png

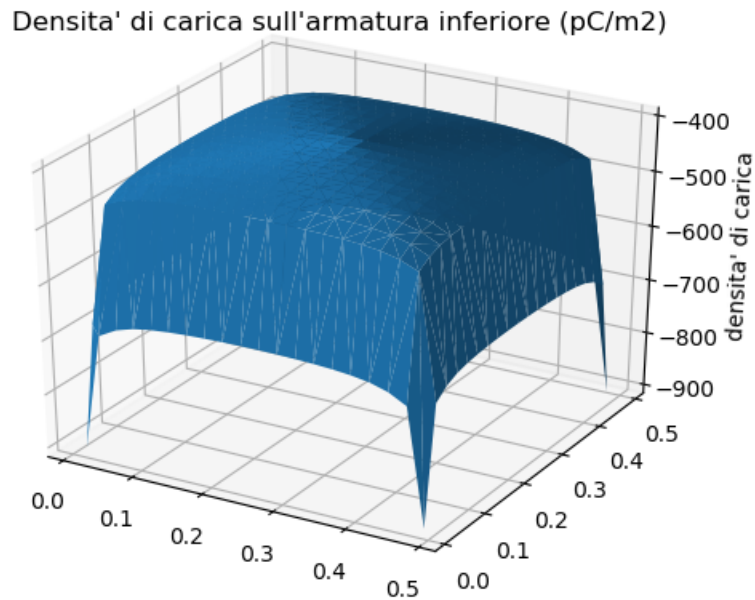


figura2.png

Calcolando la capacit  dello stesso condensatore secondo la relazione (1) si ottiene:

$$C = \frac{\epsilon S}{d} = \frac{8,8541 \times 10^{-12} \times 0,25}{0,05} = 44,27 \text{ pF}$$

Conclusioni

Il risultato deve far riflettere soprattutto gli studenti alle prime armi. Prima di applicare una formula e' necessario chiedersi se le relative ipotesi siano soddisfatte, poich  il risultato ottenuto, in caso contrario, e' errato.

E' necessario, dunque, analizzare il problema con senso critico prima di affrontarlo numericamente.

Bibliografia

1. Massimo Guarnieri, Gaetano Malesani: *Elementi di elettrotecnica - Elettromagnetismo stazionario e quasi-stazionario*, Edizioni Progetto Padova, 1999.
2. Alberto Gigli Berzolari: *Introduzione all'elettromagnetismo*, seconda edizione, la goliardica pavese, 1973.

3. Cesare Mario Arturi: *Campi elettrici, magnetici e di conduzione - Introduzione ai metodi computazionali*, Maggioli editore, 2008.
4. Valeriano Comincioli: *Analisi numerica - Metodi modelli applicazioni*, McGraw-Hill, 1995.
5. Walton C. Gibson: *The Method of Moments in Electromagnetics*, Chapman and Hall/CRC, 2008.
6. *The Method of Moments in Electromagnetics*, Massachusetts Institute of Technology, 6.635 lecture notes.
7. Travis E. Oliphant: *Guide to NumPy*, 2006
8. *NumPy Reference 1.15*, 2018.
9. *Matplotlib User's Guide 2.2.3*, 2018.

Estratto da "<https://www.electroyou.it/mediawiki/index.php?title=UsersPages:Edmonddantes:calcolo-della-capacit-di-un-condensatore-una-applicazione-del-metodo-dei-momenti>"