Carlo C (carloc)

SERIE DI FOURIER: UNA LETTURA ALTERNATIVA

12 September 2010

Premessa

Lo sviluppo in **serie di Fourier** è uno strumento molto potente per l'**analisi dei segnali periodici** ed è già stato ampliamente trattato anche su queste pagine; tuttavia quello che a mio parere è sempre mancato è almeno una giustificazione se non proprio una vera dimostrazione.
Ovviamente una trattazione esauriente e corretta non può prescindere da strumenti matematici adeguati, forse al di là delle conoscenze del lettore medio di queste pagine.
Cercherò tuttavia di dare una lettura della serie di Fourier che, partendo dalle conoscenze matematiche di una **scuola superiore**, sia in grado di chiarire, magari a livello anche un po' intuitivo, cosa c'è dietro questo strumento.
Prima di entrare nel vivo sono tuttavia necessari alcuni richiami sugli **spazi vettoriali**; mi perdoneranno i matematici, questo non è e non vuole essere un corso di algebra lineare, **rigore** e metodo matematici lasceranno spesso il posto a **intuizione** e senso comune.

Spazi vettoriali

Il piano: uno spazio di dimensione due

Forse la prima cosa che viene studiata parlando di vettori è un piano, con i due assi cartesiani e delle "frecce" che dall'origine O arrivano ad un punto V di coordinate (x,y), ad esempio in figura 1a vediamo un vettore $\vec{v}$ che termina nel punto (2,3).

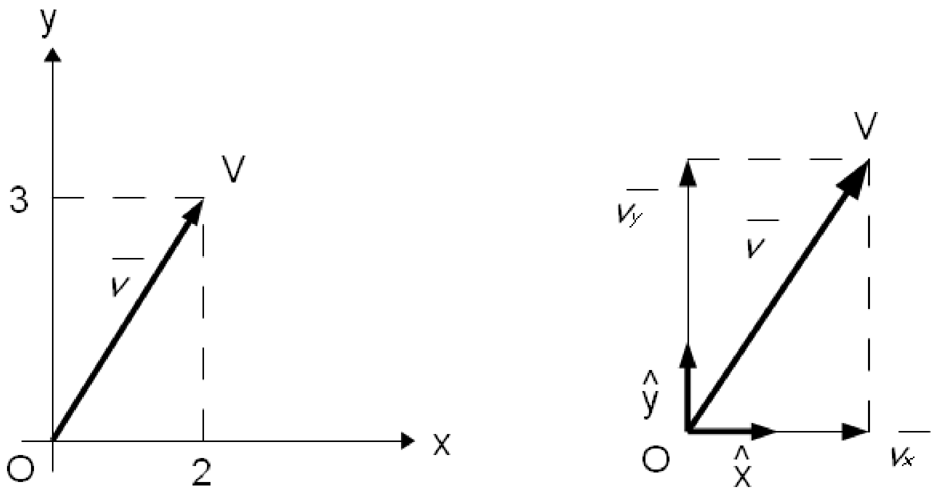

Fig 1a Fig 1b

f1.png

Una rappresentazione più corretta è tuttavia quella di figura 1b, quì abbiamo sostituito gli assi cartesiani con due vettori $\hat{x}$ e $\hat{y}$ di lunghezza unitaria ed ortogonali tra di loro chiamati **versori** degli assi. Il nostro vettore $\vec{v}$ viene ora individuato dalla **somma di opportuni multipli** dei due vettori $\hat{x}$ e $\hat{y}$ cioè nel caso del nostro esempio:
$\vec{v} = 2\hat{x} + 3\hat{y}$ o più in generale $\vec{v} = v_x\hat{x} + v_y\hat{y}$
indicando con v_x e v_y la lunghezza delle componenti di $\vec{v}$ sulle rette cui appartengono $\hat{x}$ e $\hat{y}$.
$Inseriscequilaformulain Latex$Questi due vettori si chiamano una base **ortonormale**, orto... perchè i due vettori sono tra loro ortogonali e ...normale perchè i due vettori hanno lunghezza unitaria. Questa base non è l'unica possibile, in effetti si dimostra che due qualsiasi vettori, purchè non paralleli -o come si dice più correttamente **linearmente indipendenti-** sono una base di questo spazio vettoriale. Quella ortonormale è solo molto più comoda delle altre per far di conto.
Il fatto che siano proprio due gli elementi della base necessari a **generare** il nostro spazio vettoriale si indica dicendo che il piano, ha **dimensione due** ed in definitiva ciascun vettore viene univocamente individuato da una coppia di numeri - (2,3) nell'esempio di prima.

Proiezioni e prodotto scalare

Cerchiamo ora il metodo per trovare la lunghezza delle due proiezioni di un vettore, l'elementare costruzione trigonometrica di figura 2

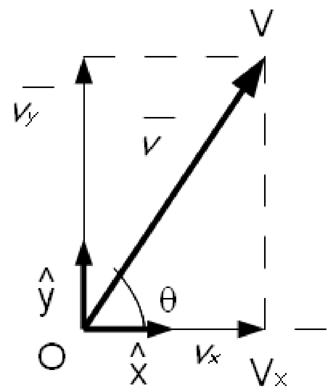

Fig 2

f2.png

mostra che la lunghezza della proiezione sulla retta di $\hat{x}$ vale:
$v_x = \overline{OV_x} = \overline{OV}cos(\theta)$
Questa proiezione si può simbolicamente indicare con l'operazione di **prodotto scalare**, indicata con un punto,e che nel caso del nostro spazio vettoriale si può definere tra due vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ come
$\vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{v}\|\|\vec{w}\|cos(\theta)$
dove il simbolo $\|\vec{v}\|$ indica la lunghezza, chiamata più propriamente **norma**, di $\vec{v}$, lo stesso per $\vec{w}$ e θ è l'angolo compreso tra i due vettori.
Nel caso poi che uno dei due vettori abbia norma (lunghezza) uno la formula si semplica in
$\vec{v} \cdot \hat{x} = \|\vec{v}\|cos(\theta)$
proprio come richiesto per la proiezione di figura 2. Quindi il vettore proiezione di $\vec{v}$ sulla retta di $\hat{x}$ diventa un multiplo del versore secondo il coefficiente appena calcolato:
$\vec{v}_x = v_x\hat{x} = (\vec{v} \cdot \hat{x})\hat{x}$
e infine sommando le componenti lungo le rette di tutti gli elementi della base si arriva all'identità:
$\vec{v} = (\vec{v} \cdot \hat{x})\hat{x} + (\vec{v} \cdot \hat{y})\hat{y}$
Cioè possiamo affermare che "un vettore è uguale alla **somma delle sue proiezioni** secondo una certa base, queste proiezioni si trovano con il prodotto scalare"

Formalizziamo la definizione di norma

La norma assimilata alla lunghezza è un concetto molto intuitivo nel caso finora trattato di uno spazio vettoriale su di un piano ma in vista di alcune generalizzazioni che faremo abbiamo bisogno di qualcosa di più formale. Se pensassi di fare il prodotto scalare di un vettore con se stesso, con le definizioni prima date otterrei

dato che si ha che $\theta = 0$ e quindi $cos(\theta) = 1$:
$\vec{v} \cdot \vec{v} = \|\vec{v}\|\|\vec{v}\|cos(0) = \|\vec{v}\|^2$
In definitiva posso definire la norma come:
$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$

...e di ortogonalità

anche la definizione di ortogonalità finora implicitamente usata - angolo compreso = 90°- soffre di essere poco formale, ma rivedendo la definizione di prodotto scalare prima data:
$\vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{v}\|\|\vec{w}\|cos(\theta)$
ci si accorge che se l'angolo compreso vale 90° il coseno vale 0 e quindi anche il prodotto scalare vale 0, quindi
$\vec{v} \perp \vec{w} \iff \vec{v} \cdot \vec{w} = 0$

Generalizzazione degli spazi vettoriali

Dal piano allo spazio

Quello che abbiamo visto può essere esteso anche ad altri casi, la cosa più ovvia è forse quella di passare da un piano allo spazio tridimensionale, abbiamo solo bisogno di tre vettori ortonormali come base ed in questo caso si avrebbe che:
$\vec{v} = (\vec{v} \cdot \hat{x})\hat{x} + (\vec{v} \cdot \hat{y})\hat{y} + (\vec{v} \cdot \hat{z})\hat{z}$
indicando come d'uso con x, y e z le direzioni dei tre assi.

Altri spazi vettoriali

La nozione intuitiva di spazio vettoriale, "un mondo di frecce" non è altro che uno dei possibili spazi vettoriali. In matematica uno spazio vettoriale è un **insieme** di "oggetti" **su cui siano definiti somma e multiplo**. Quindi svariati sono i possibili "oggetti" per formare uno spazio vettoriale alcuni sono ad esempio:

- tutte le possibili frecce appunto su cui sappiamo eseguire somma e multiplo (come fatto nel primo paragrafo)
- tutti i possibili gruppi di 2,3,..,n numeri, di solito rappresentati in colonne
- tutti i possibili polinomi, anche due polinomi possono essere sommati o moltiplicati per un numero con le regole dell'algebra comunemene note
- tutte le possibili funzioni, idem come sopra, posso sommare due funzioni o moltiplicare una funzione per un numero.

Dimensioni

Anche le dimensioni di uno spazio vettoriale non sono limitate a tre, ad esempio "gruppi di n numeri" è uno spazio vettoriale di dimensione n, e questo può essere 4, 5,.. 1000.... Semplicemente le basi di questi spazi non saranno formate da due o tre elementi linearmente indipendenti ma da 4, 5,.. 1000....
Ma si può andare oltre, posso pensare anche a spazi di **dimensione infinita**, con la base formata da infiniti elementi. A questa specie appartiene ad esempio lo spazio dei polinomi.
Una base per questo spazio è piuttosto semplice da immaginare:
$P(x) = \left\langle 1, x, x^2, x^3, \ldots \right\rangle$
..con multipli opportuni di questi elementi posso "costruire" qualsiasi polinomio (in effetti il simbolo "parentesi triangolare" appena introdotto significa proprio "i multipli che vuoi tu di quello che ci sta dentro).

Prodotto scalare

Anche il prodotto scalare può essere generalizzato per lavorare sugli spazi vettoriali sopra accennati, in effetti una operazione per chiamarsi prodotto scalare **deve solo rispettare alcune definizini** assiomatiche (che non riporterò per semplicità). Il concetto importante è che **comunque definito il prodotto scalare valgono tutte le relazioni prima geometricamente ricavate nel piano** quindi in qualsiasi spazio vettoriale dotato di prodotto scalare e norma è vero che:

- un vettore può essere proiettato su di un altro
- due vettori sono ortogonali se il loro prodotto scalare vale zero
- posso calcolare la norma di un vettore

Riassumendo

Quanto sopra porta ad affermazioni che se pur intuitivamente lasciano all'inizio perplessi sono perfettamente lecite e talvolta anche utili. Ad esempio: "calcolare la proiezione di un polinomio su di un altro", "calcolare la norma di una funzione" o "queste due funzioni sono ortogonali"!
Non si deve tentare di visualizzare uno spazio di dimensione 4 o uno spazio di funzioni, non è possibile, ma dobbiamo affidarci agli strumenti matematici che si sono dimostrati efficaci per due e tre dimensioni e per così dire procedere in "navigazione strumentale".
Così ad esempio pensando ad uno spazio V di dimensione 4, se ho una sua base ortonormale che si indica con (i vettori in senso più generale si denotano non con la freccia sopra ma scrivendoli in grassetto):
$V = \langle \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}, \mathbf{e_4} \rangle$
allora posso scrivere un qualsiasi suo vettore come somma delle sue proiezioni sulla

base
$\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e_1})\mathbf{e_1} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e_2})\mathbf{e_2} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e_3})\mathbf{e_3} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e_4})\mathbf{e_4}$
o equivalenemente chiamando ciascun coefficiente con
$c_1 = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e_1}) \ldots c_4 = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e_4})$
$\mathbf{v} = c_1\mathbf{e_1} + c_2\mathbf{e_2} + c_3\mathbf{e_3} + c_4\mathbf{e_4}$

La serie di Fourier

Ora abbiamo gli strumenti necessari ad affrontare la serie di Fourier efficacemente.

Lo spazio delle funzioni periodiche

Abbiamo già visto che "tutte le possibili funzioni" sono uno spazio vettoriale dato che è possibile sommarle o moltiplicarle per un numero. Pensiamo ora alle funzioni periodiche di periodo T; se sommo due di tali funzioni otterrò ancora una funzione periodica di periodo T, inoltre ovviamente anche il multiplo di una funzione periodica è ancora periodica e con lo stesso periodo; quindi anche "tutte le possibili funzioni periodiche di periodo T" è uno spazio vettoriale.

Un prodotto scalare

Ora abbiamo necessità di un prodotto scalare per operare su tale spazio, non siamo entrati nel dettaglio della definizione generale di questo prodotto, prenderemo per buono che, se f(t) e g(t) sono due funzioni periodiche di periodo T , allora questa è una buona definizione:
$$\mathbf{f(t)} \cdot \mathbf{g(t)} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)g(t)\,dt$$
Ci limiteremo a notare che in effetti questa operazione ha due vettori (funzioni) in ingresso e che essendo un integrale definito fornisce un numero come risultato.
Per inciso questa definizione ha necessità che il prodotto f(t)g(t) sia integrabile, ma questa limitazione è di scarso peso, perché in pratica tutte le "normali" funzioni che rappresentano segnali soddisfano il criterio.
E' interessante notare che facendo la norma di una funzione con questo prodotto scalare ottengo:
$$\|\mathbf{f(t)}\| = \sqrt{\mathbf{f(t)} \cdot \mathbf{f(t)}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T (f(t))^2\,dt}$$
cioè quello che si chiama valore quadratico medio o valore efficace di un segnale.

Una base

Come detto essendo uno spazio vettoriale di dimensione infinita la base sarà formata da infiniti elementi. Anche quì prenderemo per buono che la successione:
$1, cos(\omega t), sin(\omega t), cos(2\omega t), sin(2\omega t), \ldots$

con $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$
sia una base dello spazio vettoriale delle funzioni periodiche di periodo T.
Verifichiamo solo che sia una base ortonormale:
per l'ortogonalità deve essere che il prodotto scalare tra due qualsiasi elementi sia zero.
Il caso che uno dei due sia il primo elemento della base, cioè 1, si riduce all'integrale di un seno o di un coseno su di un periodo o su un suo multiplo intero il quale vale zero:

$$1 \cdot cos(n\omega t) = \frac{1}{T}\int_0^T cos(n\omega t)\,dt = \frac{1}{n2\pi}\left[sin(n\omega t)\right]_0^T =$$
$$= \frac{sin(n2\pi) - sin(0)}{n2\pi} = \frac{0-0}{n2\pi} = 0$$

- quindi **qualsiasi termine in seno o coseno è ortogonale al termine 1**.

Per gli altri casi trattiamo il generico prodotto tra l' n-esimo e m-esimo termine. Gli integrali sotto sebbene appena laboriosi da fare sono in realtà semplici, si può integrare due volte per parti o usare un po' di trigoometria, comunque non li svolgerò per non appesantire troppo la trattazione

$$cos(n\omega t) \cdot cos(m\omega t) = \frac{1}{T}\int_0^T cos(n\omega t)cos(m\omega t)\,dt = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } n = m \\ 0 & \text{se } n \neq m \end{cases}$$
$$sin(n\omega t) \cdot sin(m\omega t) = \frac{1}{T}\int_0^T sin(n\omega t)sin(m\omega t)\,dt = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } n = m \\ 0 & \text{se } n \neq m \end{cases}$$
$$sin(n\omega t) \cdot cos(m\omega t) = \frac{1}{T}\int_0^T sin(n\omega t)cos(m\omega t)\,dt = 0$$

In questa sede è più interessante analizzare il loro risultato:

- nel caso di prodotti tra seni o tra coseni notiamo che abbiamo zero appena m è diverso da n, cioè si potrebbe dire che **le varie armoniche sono tra loro ortogonali**.
- mentre nel caso di prodotto "misto" tra un seno ed un coseno abbiamo sempre zero, cioè le componenti in **seno ed in coseno sono tra loro ortogonali** anche a parità di frequenza.

Quindi in definitiva quella proposta è una base ortogonale, verifichiamo ora che la norma di tutti gli elementi sia uno.
I primi due integrali sopra, considerati nel caso n=m, ci forniscono proprio il risultato del prodotto scalare di un elemento della base con se stesso cioè proprio la norma al quadrato.
Notiamo che questa non vale 1 ma $\dfrac{1}{2}$ quindi occorre moltiplicare tutti gli elementi in seno e coseno per $\sqrt{2}$ per normalizzare la nostra base.
Nel caso dell'elemento 1 abbiamo invece che molto semplicemente:

$$\mathbf{1} \cdot \mathbf{1} = \frac{1}{T}\int_0^T \, dt = 1$$

Cioè questo elemento ha già norma uno, in definitiva la nostra **base ortonormale dello spazio delle funzioni periodiche di periodo T** diventa:

$$\left\langle 1, \sqrt{2}cos(\omega t), \sqrt{2}sin(\omega t), \sqrt{2}cos(2\omega t), \sqrt{2}sin(2\omega t), \ldots \right\rangle = \langle \mathbf{e_0}, \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots \rangle$$

Per inciso quella proposta **non è l'unica base possibile**. Un'altra molto usata si basa sui numeri complessi e la formula di Eulero e se pur perde un po' di vista l'idea reale di segnale è piuttosto pratica per far di conto. Tuttavia questa rappresentazione richiama ancora un mondo di seni e coseni e pare piuttosto solo un modo diverso di scrivere la stessa cosa.

Ci sono anche basi radicalmente diverse, ad esempio si può dimostrare che -sotto certe ipotesi- anche una successione di onde quadre è una base dello spazio delle funzioni periodiche e quindi qualsiasi segnale può essere pensato anche come la somma di infinete onde quadre....http://link.aip.org/link/JMAPAQ/v39/i8/p4226/s1

Più in generale -ancora sotto certe ipotesi- una successione di multipli in frequenza di una qualsiasi funzione periodica può essere usata come base! Vedere http://link.aip.org/link/JMAPAQ/v40/i7/p3654/s1

La serie di Fourier

Ora abbiamo tutti gli strumenti necessari per concludere:

come già visto il nostro vettore (funzione) sarà dato dalla somma dei multipli della base secondo i coefficienti ricavati con il prodotto scalare:

ed il generico i-esimo coefficiente sarà:

$$c_i = \mathbf{f(t)} \cdot \mathbf{e_i} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e_i(t)\, dt$$

dove sostituendo le espressioni dei vettori della base ci avviciniamo alla classica formulazione dei coefficienti della serie di Fourier:

- Nel caso di e_0:

$$c_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, dt$$

- Nel caso di un coseno:

$$a_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\sqrt{2}cos(n\omega t)\, dt = \frac{\sqrt{2}}{T}\int_0^T f(t)cos(n\omega t)\, dt$$

- E nel caso di un seno:

$$b_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\sqrt{2}sin(n\omega t)\, dt = \frac{\sqrt{2}}{T}\int_0^{rT} f(t)sin(n\omega t)\, dt$$

ed infine sostituiamo nell'espressione che permette di "ricostruire" il segnale originale come somma delle sue componenti i vettori della base ed i coefficienti

appena calcolati:
$\mathbf{f}(\mathbf{t}) = \ldots + c_n \mathbf{e_n}(\mathbf{t}) + \ldots$
$f(t) = c_0 + a_1\sqrt{2}cos(\omega t) + b_1\sqrt{2}sin(\omega t) + \ldots$
Cominciamo adesso a riconosce delle formule familiari... solo quelle radici di 2 sono un po' "antiestetiche", questo si risolve semplicemente accorpando le due radici di due come segue:

$$f(t) = \ldots + c_n e_n(t) + \ldots = \ldots + \left(\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\sqrt{2}cos(n\omega t)\,dt\right)\sqrt{2}cos(n\omega t) + \ldots =$$
$$= \ldots + \left(\frac{2}{T}\int_0^T f(t)cos(n\omega t)\,dt\right)cos(n\omega t) + \ldots$$

arrivando finalmente alle note formule

$$c_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$$
$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)cos(n\omega t)\,dt$$
$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)sin(n\omega t)\,dt$$
$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n cos(n\omega t) + b_n sin(n\omega t)\right)$$

Conclusioni

Ben lontano da voler essere un trattato di matematica, queste righe vorrebero essere una breve carrellata su quello che, nella mia opinione, è la vera "anima" della scomposizione in serie di Fourier. A chi volesse approfondire consiglio -a parte qualche buon libro di algebra lineare e di analisi- Wikipedia dove questi argomenti sono trattati piuttosto esaurientemente.
Inoltre questa notazione simbolica semplifica molto e generalizza tutte le dimostrazioni rigorose necessarie nel caso di un approccio più formale al'argomento. Permette infatti, non solo di "scrivere" molto meno per ad esempio dimostrare la convergenza, ma anche e soprattutto di svincolarsi dal particolare prodotto scalare usato ed avere risultati più generali.
Spero comunque che anche queste brevi note possano gettare un po' di luce su questo affascinante agomento

Estratto da "http://www.electroyou.it/mediawiki/index.php?title=UsersPages:Carloc:fourier2"