Zeno Martini (admin), Bruno Valente (BrunoValente)

ANALISI DI UN "ABBAGLIO"

14 October 2009

Premessa di admin

Nell'articolo **Condensatori e simmetria** avevo mostrato come il **coefficiente di simmetria** ipotizzato da **Bruno Valente** per calcolare la differenza di potenziale tra due armature metalliche isolate e con diversa carica elettrica, in combinazione con la loro effettiva capacità, avesse una giustificazione nei **coefficienti di potenziale**, già trattati da **J.C.Maxwell**.

La conclusione è stata contestata da un utente che ha manifestato il desiderio di rimanere anonimo, il quale ha definito fantomatico il **coefficiente K** perché iimpedisce di vedere il corretto modo di affrontare il problema. Io dire invece, che non lo intacca minimamente: è solo un modo diverso di affrontarlo, che convive benissimo con l'altro. Che il coefficiente possa poi essere **utile o meno**, se ne potrà discutere, ma si tratta di un **discorso diverso**.

Il mio obiettivo è stabilire se il K pensato da Bruno Valente ha una **giustificazione teorica** e se può essere calcolato in condizioni specificate: per quanto matematicamente trovato la risposta è affermativa nel caso di due armature isolate.

Posso concordare nel ritenere praticamente impossibile disporre di due armature perfettamente isolate, poiché dobbiamo sempre tener conto di una terza ed ineliminabile armatura che è la terra. Non è però impossibile lanciarle nello spazio, e nulla comunque vieta di considerarle teoricamente isolate. Perché è concepibile una sfera conduttrice, da sola e carica, mentre non lo dovrebbero essere due conduttori qualsiasi, con carica totale non nulla?

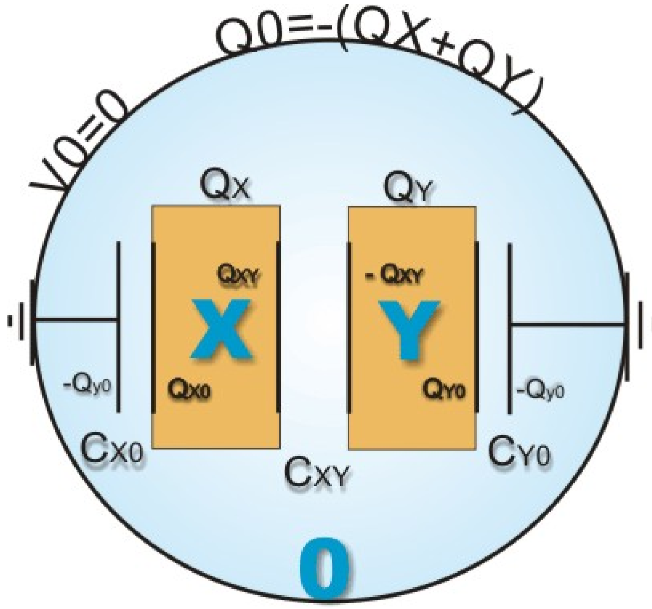
In questo articolo il problema è affrontato considerando **tre conduttori**: i due che interessano e l'inevitabile terzo conduttore che determina con le armature dell'altro due capacità parassite.

E' suddiviso in **due parti** perché è l'unione di due articoli. La prima contiene l'analisi dei tre conduttori da me fatta; la seconda quella di Bruno Valente.

I due procedimenti usano simboli diversi. Non è difficile comunque stabilire le corrispondenze.

Il procedimento di admin

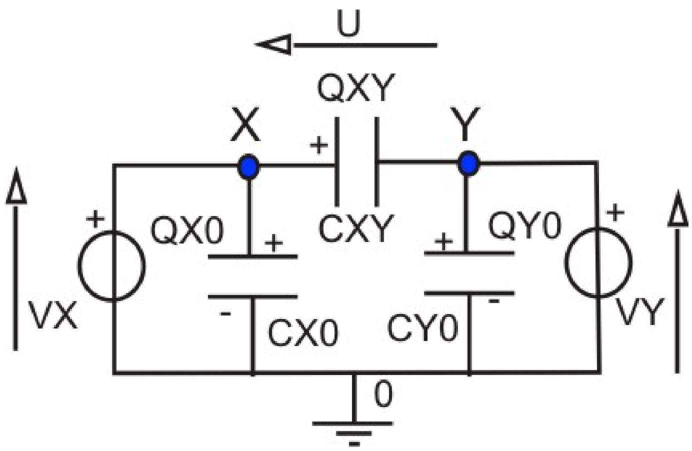
Schematizziamo allora tutto con tre conduttori come, ad esempio, nella figura seguente.



Tre conduttori

I due conduttori, X ed Y, sono le armature del nostro condensatore. mentre il terzo conduttore, è quello da cui da cui sono prelevate le cariche. In questa struttura non esiste la sola capacità tra le due armature X ed Y, ma ognuna delle armature presenta, rispetto al terzo conduttore una specifica capacità, che diremo parassita, perché "disturba" la capacità che più ci interessa: quella tra le armature. Possiamo dire di avere un sistema costituito da tre capacità parziali, cui per il momento daremo un simbolo, ma che si possono definire operativamente. Osserviamo anche che la capacità parziale tra le due armature in presenza del terzo conduttore è diversa dalla capacità tra gli stessi conduttori considerati da soli.

Possiamo schematizzare il tutto nel circuito equivalente che mostra anche in che modo sono state caricati i due conduttori prelevando la carica dal terzo.



Circuiro equivalente

SIMBOLI

- C_{XY}: capacità parziale tra le armature (C_c)
- C_{X0}: capacità parassita dell'armatura X rispetto al terzo conduttore (es: la terra) (C_a)
- C_{Y0}:capacità parassita dell'armatura Y rispetto a terra (C_b)
- V_X: potenziale dell'armatura X (U_1)
- V_Y:potenziale dell'armatura Y (U_2)
- Q_X:carica sull'armatura X (Q_1)
- Q_Y:carica sull'armatura Y (Q_2)
- Q_{X0}: carica del condensatore C_{X0}
- Q_{Y0}: carica del condensatore C_{Y0}
- Q_{XY}: carica del condensatore C_{XY}
- **Nota**: *tra parentesi le corrispondenze con i simboli usati nel procedimento di* ***Bruno Valente***.

IPOTESI

- $V_0 = 0$: potenziale della terra
- $Q_0 = -(Q_X + Q_Y)$: carica assunta dal terzo conduttore.

Avremo perciò:

$$Q_X = Q_{X0} + Q_{XY}$$
$$Q_Y = Q_{y0} - Q_{xy}$$

[0]

Ai capi di ogni condensatore avremo una tensione:

$$U = V_X - V_Y = \frac{Q_{XY}}{C_{XY}}$$

$$U_{X0} = V_X - V_0 = V_X = \frac{Q_{X0}}{C_{X0}}$$

$$U_{Y0} = V_Y - V_0 = V_Y = \frac{Q_{Y0}}{C_{Y0}}$$

[1]

E' necessariamente

$U + U_{Y0} - U_{X0} = 0$

$U = U_{X0} - U_{Y0}$

$$\frac{Q_{XY}}{C_{XY}} = \frac{Q_{X0}}{C_{X0}} - \frac{Q_{Y0}}{C_{Y0}}$$

Sostituendo nelle [0] quanto si ricava dalle [1]

$$\begin{aligned} Q_X &= C_{X0} \cdot V_X + C_{XY} \cdot (V_X - V_Y) \\ Q_Y &= C_{y0} \cdot V_Y - C_{xy} \cdot (V_X - V_Y) \end{aligned}$$

ed ordinando

$$\begin{aligned} Q_X &= (C_{X0} + C_{XY}) \cdot V_X - C_{XY} \cdot V_Y \\ Q_Y &= -C_{XY} \cdot V_X + (C_{XY} + C_{Y0}) \cdot V_Y \end{aligned}$$

[3]

- **Nota:** le due equazioni precedenti avremmo potuto scriverle applicando il metodo dei potenziali di nodo al circuito equivalente

Risolvendo, con Cramer, le [3] rispetto a V_X e V_Y

$$\begin{bmatrix} Q_X \\ Q_Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{X0} + C_{XY} & -C_{XY} \\ -C_{XY} & C_{Y0} + C_{XY} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_X \\ V_Y \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} C_{X0} + C_{XY} & -C_{XY} \\ -C_{XY} & C_{Y0} + C_{XY} \end{vmatrix} = (C_{X0} + C_{XY}) \cdot (C_{Y0} + C_{XY}) - C_{XY}^2 =$$
$$= C_{X0} \cdot C_{Y0} + C_{XY} \cdot (C_{X0} + C_{Y0})$$

$$V_X = \frac{\begin{vmatrix} Q_X & -C_{XY} \\ Q_Y & C_{Y0}+C_{XY} \end{vmatrix}}{\Delta} = Q_X \cdot \frac{C_{Y0}+C_{XY}}{\Delta} + Q_Y \cdot \frac{C_{XY}}{\Delta}$$

$$V_Y = \frac{\begin{vmatrix} C_{X0}+C_{XY} & Q_X \\ -C_{XY} & Q_Y \end{vmatrix}}{\Delta} = Q_Y \cdot \frac{C_{X0}+C_{XY}}{\Delta} + Q_X \cdot \frac{C_{XY}}{\Delta}$$

$$U = V_X - V_Y = Q_X \cdot \frac{C_{Y0}}{\Delta} - Q_Y \cdot \frac{C_{X0}}{\Delta}$$

Posto

$$K_X = C_{XY} \cdot \frac{C_{Y0}}{\Delta} = \frac{1}{\frac{C_{X0}}{C_{XY}} + \frac{C_{X0}}{C_{Y0}} + 1}$$

$$K_Y = C_{XY} \cdot \frac{C_{X0}}{\Delta} = \frac{1}{\frac{C_{Y0}}{C_{XY}} + \frac{C_{Y0}}{C_{X0}} + 1}$$

arriviamo alla

$$U \cdot C_{XY} = K_X \cdot Q_X - K_Y \cdot Q_Y$$

[4]

Questa formula permette perciò di calcolare la tensione tra le due armature usando le cariche effettive su di esse, moltiplicate ciascuna per un coefficiente che è funzione delle capacità parziali tra i tre conduttori.

Questa formula è simile a quella proposta da Bruno Valente per le due armature isolate. In quel caso il secondo coefficiente era però il complemento ad 1 del primo.

Supponiamo ora che le capacità parassite siano molto piccole rispetto alla capacità tra i due conduttori, cioè che sia

$$C_{X0} << C_{XY}$$
$$C_{Y0} << C_{XY}$$

Possiamo scrivere

$$K_X \cong \frac{1}{\frac{C_{X0}}{C_{Y0}}+1}$$
$$K_Y \cong \frac{1}{\frac{C_{Y0}}{C_{X0}}+1}$$

per cui, posto

$$\frac{C_{X0}}{C_{Y0}} = n$$

Avremo

$$K_X \cong \frac{1}{n+1}$$
$$K_Y \cong \frac{n}{n+1}$$

ed essendo

$$1 - K_Y = K_X$$

potremo scrivere ancora

$$U \cdot C_{XY} \cong (1 - K_Y) \cdot Q_X - K_Y \cdot Q_Y$$

la formula di **Bruno Valente.**

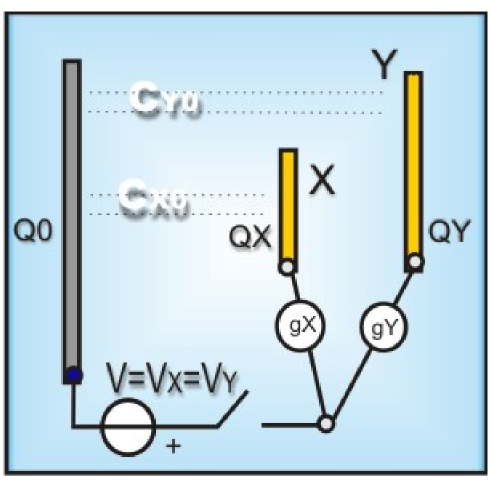
Ora abbiamo anche un'idea di che cosa sia la simmetria. Si ha simmetria quando $n = 1$, cioè quando le due capacità parassite sono uguali , nel qual caso $K_X = K_Y = \frac{1}{2}$

Se le due capacità sono invece molto diverse tra loro, quindi per $n \to \infty$ o per $n \to 0$ avremo. rispettivamente $K_X = 0$, $K_Y = 1$ e $K_X = 1$, $K_Y = 0$

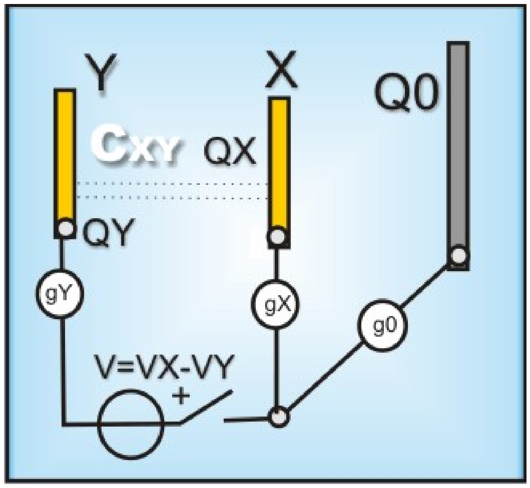
Definizioni e misure

Dalle [3] si possono ricavare le definizioni operative per il calcolo e la misura delle tre capacità parziali

Le figure seguenti mostrano come sia possibile misurare la misura delle tre capacità parziali



Circuito per la misura delle due capacità parassite



Misura della capacità parziale tra i due conduttori X ed Y

Alla chiusura del tasto il generatore carica il sistema di conduttori.

Alla chiusura del tasto sui conduttori X si localizzano le cariche Q_X, Q_Y, e Q_0, che possono essere rispettivamente misurate dagli strumenti g_X, g_Y e g_Y, ad esempio galvanometri balistici.

Nella prima figura le armature X ed Y sono entrambe allo stesso potenziale rispetto alla terza armatura su cui si localizzerà una carica Q_0 uguale e contraria alla somma.

Nella seconda è l'armatura X è allo stesso potenziale del terzo conduttore 0 e la tensione del generatore V è applicata tra le due armature

In base alle definizioni delle stesse ricavabili dalle [3] si ha

$$C_{X0} = \left(\frac{Q_X}{V_X}\right)_{V_X=V_Y} = \frac{Q_X}{V}$$

$$C_{Y0} = \left(\frac{Q_Y}{V_Y}\right)_{V_X=V_Y} = \frac{Q_Y}{V}$$

$$C_{XY} = \left(\frac{Q_X}{V_X - V_Y}\right)_{V_X=V_0} = \frac{Q_X}{V}$$

[5]

Ma c'è di più

Io mi ero fermato al paragrafo precedente, ritenendomi soddisfatto.

Ma Bruno Valente mi ha fatto notare che se ci si riferisce alla capacità equivalente tra i due conduttori, che tiene conto della capacità parassite, invece che alla capacità parziale C_{XY}, non c'è più alcun bisogno della condizione di capacità parassite trascurabili rispetto alla capacità parziale, per ottenere la sua formula.

La capacità equivalente vale:

$$C_{eq,XY} = C_{XY} + \frac{C_{X0} \cdot C_{Y0}}{C_{X0} + C_{Y0}}$$

Ponendo

$$K_1 = K_X \cdot \left(\frac{C_{eq,XY}}{C_{XY}}\right) = K_X \cdot \left(\frac{C_{XY} + \frac{C_{X0} \cdot C_{Y0}}{C_{X0}+C_{Y0}}}{C_{XY}}\right) = \frac{C_{Y0}}{\Delta} \cdot \left(C_{XY} + \frac{C_{X0} \cdot C_{Y0}}{C_{X0}+C_{Y0}}\right) =$$
$$= \frac{C_{Y0}}{C_{X0} \cdot C_{Y0} + C_{XY} \cdot (C_{X0}+C_{Y0})} \cdot \left(C_{XY} + \frac{C_{X0} \cdot C_{Y0}}{C_{X0}+C_{Y0}}\right) \rightarrow$$
$$K_1 = \frac{C_{Y0}}{C_{X0}+C_{Y0}}$$

$$K_2 = K_Y \cdot \left(\frac{C_{eq,XY}}{C_{XY}}\right) = \left(\frac{C_{XY} + \frac{C_{X0} \cdot C_{Y0}}{C_{X0}+C_{Y0}}}{C_{XY}}\right) = \frac{C_{X0}}{\Delta} \cdot \left(C_{XY} + \frac{C_{X0} \cdot C_{Y0}}{C_{X0}+C_{Y0}}\right) =$$
$$= \frac{C_{X0}}{C_{X0} \cdot C_{Y0} + C_{XY} \cdot (C_{X0}+C_{Y0})} \cdot \left(C_{XY} + \frac{C_{X0} \cdot C_{Y0}}{C_{X0}+C_{Y0}}\right) \rightarrow$$
$$K_2 = \frac{C_{X0}}{C_{X0}+C_{Y0}}$$

quindi sostituendo nella [4]

si ha

$$U \cdot C_{eq,XY} = K_1 \cdot Q_X - K_2 \cdot Q_Y$$

con $K_1 = 1 - K_2$

quindi, posto

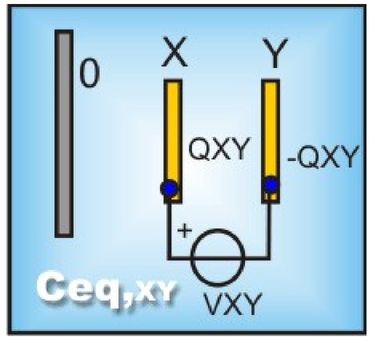
$$K = K_2 = \frac{C_{X0}}{C_{X0} + C_{Y0}} = \frac{n}{n+1}$$

avremo ancora più limpida la formula.

$$U \cdot C_{eq,XY} = (1 - K) \cdot Q_X - K \cdot Q_Y$$

Per la misura della capacità equivalente basta imporre una tensione V_{XY} e misurare la carica Q_{XY} senza porre vincoli al terzo conduttore, come mostra la seguente figura.

$$C_{eq,XY} = \frac{Q_{XY}}{V_{XY}}$$



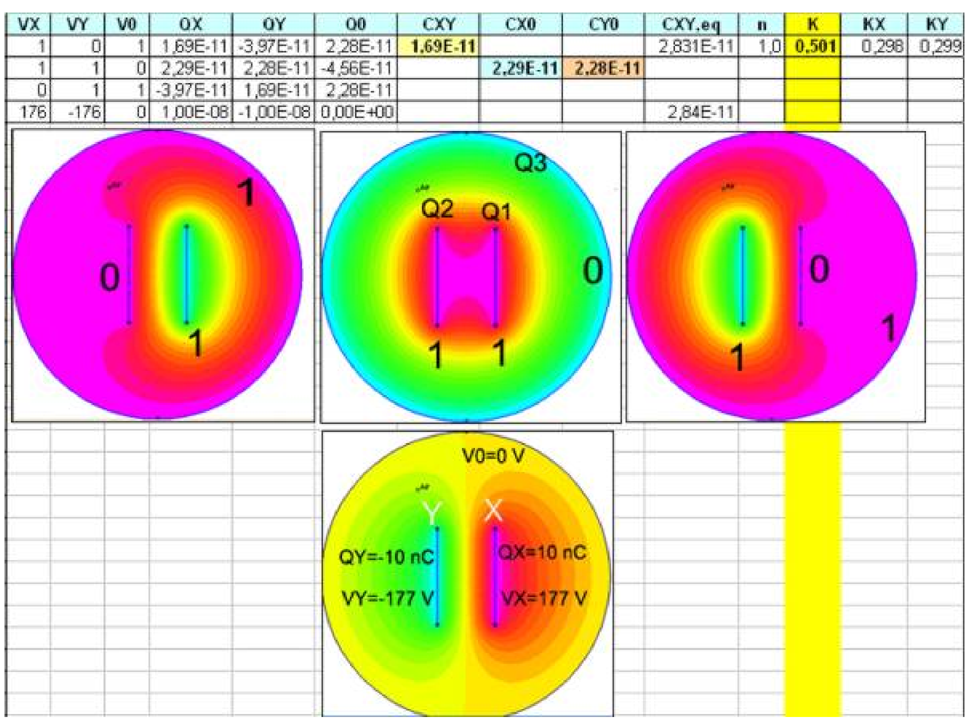
Capacità equivalente

Simulazioni

Ecco i risultati di due simulazioni effettuate con **FEMM**.

- **Nota**: *per rispettare l'ipotesi di carica complessiva nulla il terzo conduttore circonda completamente le due armature nelle prime due figure, mentre nella terza la condizione ai bordi scelta è quella di densità di carica nulla.*

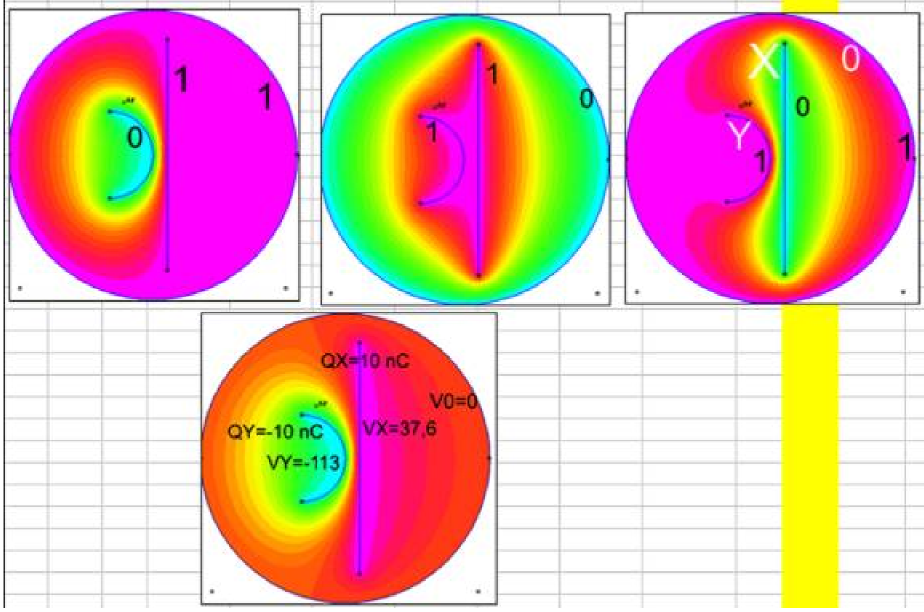
Il diametro del cerchio esterno che costituisce l'armatura di riferimento è di 600 mm. La profondità è di 1000 mm.



VX	VY	V0	QX	QY	Q0	CXY	CX0	CY0	CXY,eq	n	K	KX	KY
1	0	1	1,69E-11	-3,97E-11	2,28E-11	1,69E-11			2,831E-11	1,0	0,501	0,298	0,299
1	1	0	2,29E-11	2,28E-11	-4,56E-11		2,29E-11	2,28E-11					
0	1	1	-3,97E-11	1,69E-11	2,28E-11								
176	-176	0	1,00E-08	-1,00E-08	0,00E+00				2,84E-11				

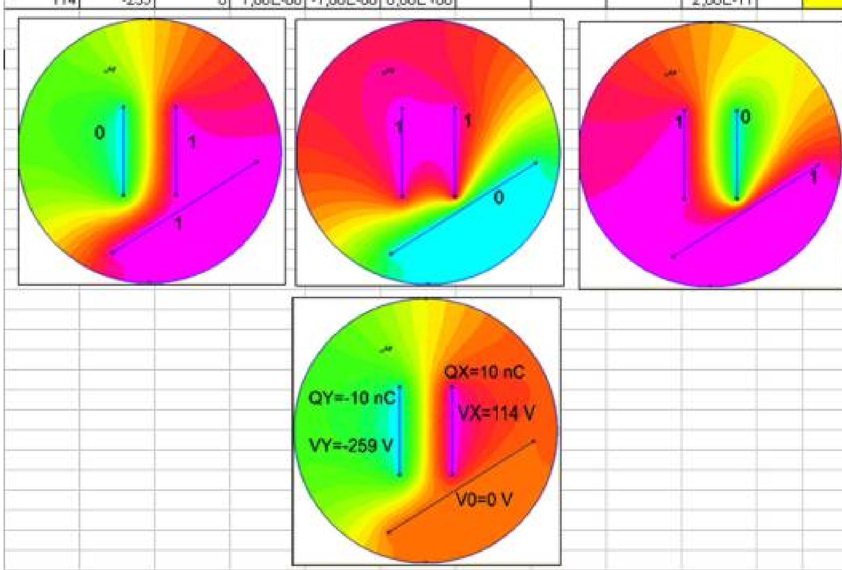
Armature X ed Y piane

VX	VY	V0	QX	QY	Q0	CXY	CX0	CY0	CXY,eq	n	K	KX	KY
1	0	1	5,24E-11	-7,09E-11	1,85E-11	5,24E-11			6,628E-11	3,01	0,750	0,197	0,593
1	1	0	5,56E-11	1,85E-11	-7,41E-11		5,56E-11	1,85E-11					
0	1	1	-1,08E-10	5,24E-11	5,56E-11								
37,7	-113	0	1,00E-08	-1,00E-08	0,00E+00				6,63E-11				



Amtatura X piana, Y semicilindrica

VX	VY	V0	QX	QY	Q0	CXY	CX0	CY0	CXY,eq	n	K	KX	KY
1	0	1	1,80E-11	-3,07E-11	1,27E-11	1,80E-11			2,67E-11	2,3	0,694	0,206	0,468
1	1	0	2,86E-11	1,26E-11	-4,12E-11		2,86E-11	1,26E-11					
0	1	1	-4,67E-11	1,81E-11	2,86E-11								
114	-259	0	1,00E-08	-1,00E-08	0,00E+00				2,68E-11				



Tre armature piane dissimmetriche

Considerazioni finali

Il coefficiente K è dunque definibile e calcolabile, anche con tre conduttori, nelle condizioni specificate di somma algebrica nulla delle cariche su di esse. Esso dipende dal rapporto tra le capacità parassite.

Se le capacità parassite sono uguali si ha $K = \frac{1}{2}$, e la struttura è simmetrica.

Ciò si verifica se esiste una simmetria geometrica tra le tre armature. Non basta cioè una semplice simmetria tra le due armature considerate.

Quando ciò si verifica, le superfici equipotenziali sono dotate di simmetria se le armature X ed Y hanno lo stesso potenziale in valore assoluto oppure la stessa carica.

Allontanando il terzo conduttore da quelle che si stanno considerando come armature, le capacità parassite variano. Cosa succede se il terzo conduttore è portato infinitamente distante? Quanto vale in queste condizioni il coefficiente K?

Matematicamente, se indichiamo con d la minore delle distanze tra il conduttore 0 ed i due conduttori X ed Y, dobbiamo calcolare questo limite:

$$\lim_{d \to \infty} \frac{C_{X0}}{C_{X0} + C_{Y0}}$$

Possiamo dire di conoscerlo già, in quanto portare all'infinito il terzo conduttore, significa considerare le due armature isolate; ed il coefficiente è stato calcolato, per questa condizione, in funzione dei coefficienti di potenziale, proprio nell'articolo **Condensatori e simmetria**. Ne riporto qui per comodità l'espressione (la [5]):

$$K = \frac{p_{22} - p_{12}}{p_{11} + p_{22} - 2 \cdot p_{12}}$$

Cerchiamo di vedere se è così.

Essendo tre li conduttori abbiamo a che fare con 6 coefficienti di potenziale (tenendo presente che l'uguaglianza dei coefficienti che hanno i due indici scambiati)

$$\begin{array}{llll} V_X = & p_{11} \cdot Q_X & +p_{12} \cdot Q_Y & +p_{13} \cdot Q_0 \\ V_Y = & p_{21} \cdot Q_X & +p_{22} \cdot Q_Y & +p_{32} \cdot Q_0 \\ V_0 = & p_{31} \cdot Q_X & +p_{32} \cdot Q_Y & +p_{33} \cdot Q_0 \end{array}$$

Ricordiamo che la nostra ipotesi di lavoro è

$Q_0 = -(Q_X + Q_Y)$

Sottraendo la terza equazione dalla prima e dalla seconda, e tenendo conto della condizione precedente, abbiamo

$$\begin{aligned} V_X - V_0 = & \ (p_{11} - p_{31} - p_{13} + p_{33}) \cdot Q_X & + (p_{12} - p_{32} - p_{13} + p_{33}) \cdot Q_Y \\ V_Y - V_0 = & \ (p_{21} - p_{31} - p_{23} + p_{33}) \cdot Q_X & + (p_{22} - p_{32} - p_{23} + p_{33}) \cdot Q_Y \end{aligned}$$

Poniamo

$$\begin{aligned} & A = p_{11} - p_{31} - p_{13} + p_{33} = p_{11} + p_{33} - 2p_{13} \\ & B = p_{12} - p_{32} - p_{13} + p_{33} \\ & C = p_{21} - p_{31} - p_{23} + p_{33} = B \\ & D = p_{22} - p_{32} - p_{23} + p_{33} = p_{22} + p_{33} - 2p_{23} \end{aligned}$$

e ricaviamo Q_X e Q_Y usando Cramer, ponendo $V_0 = 0$, per comodità

$$\begin{aligned} & Q_X = \tfrac{D}{\Delta} \cdot V_X - \tfrac{B}{\Delta} \cdot V_Y \\ & Q_Y = -\tfrac{B}{\Delta} \cdot V_X + \tfrac{A}{\Delta} \cdot V_Y \end{aligned}$$

dove è

$$\Delta = A \cdot D - B^2$$

Avremo, in base alle definizioni delle capacità parziali date nelle [5]

$$\begin{aligned} \left(\tfrac{Q_X}{V_X}\right)_{V_X = V_Y} = C_{X0} = \tfrac{D-B}{\Delta} \\ \left(\tfrac{Q_Y}{V_Y}\right)_{V_Y = V_X} = C_{Y0} = \tfrac{A-B}{\Delta} \end{aligned}$$

[5.a]

Quindi sarà

$$\frac{C_{X0}}{C_{X0} + C_{Y0}} = \frac{D - B}{A + D - 2 \cdot B} = \frac{p_{22} - p_{12}}{p_{22} + p_{11} - 2p_{12}} + \frac{p_{13} - p_{23}}{p_{22} + p_{11} - 2p_{12}}$$

Ora, quando il terzo conduttore è portato all'infinito, i coefficienti mutui p_{13} e p_{23} tendono a 0, (vederne le espressioni di calcolo nell'articolo: la distanza R è al denominatore dell'espressione sotto il segno di integrale, quindi la funzione integranda diventa nulla); diventa perciò nullo il secondo addendo della precedente espressione, per cui il limite del rapporto cercato vale

$$\lim_{d \to \infty} \frac{C_{X0}}{C_{X0} + C_{Y0}} = \frac{p_{22} - p_{12}}{p_{22} + p_{11} - 2p_{12}}$$

cioè l'espressione che si ricava per il K con le armature isolate.

E' implicito nelle formule precedenti, ma osserviano che il rapporto tra le capacità parassite dipende dalla posizione del terzo conduttore

$$n = \frac{C_{X0}}{C_{Y0}} = \frac{D-B}{A-B} = \frac{p_{22}-p_{12}+p_{23}-p_{13}}{p_{11}-p_{12}-p_{23}+p_{13}}$$

Quando il terzo conduttore è portato all'infinito, il rapporto diventa

$$n = \frac{p_{22}-p_{12}}{p_{11}-p_{12}}$$

In conclusione, la formula proposta da **Bruno Valente** funziona sia con due armature isolate che con tre, tenendo conto delle condizioni di carica complessiva nulla.

Certo, si può dire che non esiste un coefficiente che dipende solo dalle due armature considerate, indipendente cioè dall'ambiente in cui sono collocati. Il coefficiente dipende dalla forma e dalla dislocazione del terzo conduttore di riferimento. Del resto è così anche per la capacità tra i due conduttori, il cui valore cambia in funzione del terzo conduttore.

Se in questo senso il K è un abbaglio, siamo d'accordo.

Ma, definita la struttura, il coefficiente è calcolabile e misurabile e può essere usato per determinare la tensione tra le due armature quando sono diversamente cariche.

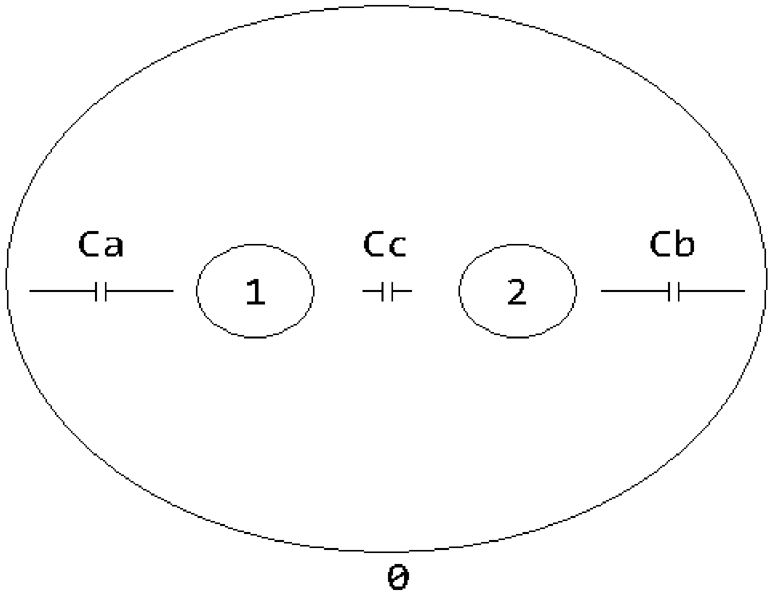
Può essere utile praticamente?

E' una domanda per la quale io non ho una risposta. I calcoli che permette di effettuare, si possono svolgere lo stesso, ovviamente. Quindi quel che si può dire è che non rappresenta nulla di nuovo: è solo un altro modo di vedere i coefficienti di potenziale o le capacità parziali, una loro variante matematica. Però non è teoricamente inconsistente, quindi non userei la parola abbaglio per definire il legame che esso ha con la simmetria della struttura elettrostatica considerata.

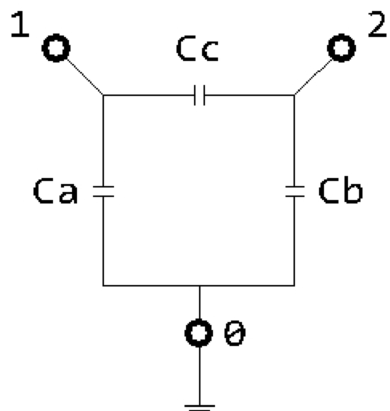
Il procedimento di Bruno Valente

Parto dall’inizio: La questione è quella di verificare se la formula $U_{12} = \frac{Q_1(K) - Q_2(1-K)}{C_{12}}$

che mette in relazione la differenza di potenziale che viene a stabilirsi tra due corpi conduttori elettricamente carichi ed isolati e la carica elettrica netta su ciascuno di essi, sia corretta.



Condensatori e simmetria Fig1.JPG



Condensatori e simmetria Fig2.JPG

Un modello adatto per rappresentare la nostra disposizione è quello di fig. 2 dove attraverso tre capacità si individuano le vie di interazione elettrica tra i due conduttori 1 e 2 e tra ciascuno di essi ed un ipotetico terzo conduttore 0 che avvolge il tutto e che può essere pensato, ma non necessariamente, ad una distanza infinita dai primi due. Consideriamo inoltre il tutto elettricamente scarico e quindi le eventuali cariche sui conduttori 1 e 2 non possono che provenire dal conduttore 0 ma anche questo non è strettamente necessario. Si individuano quindi le tre capacità Ca, Cb e Cc che dovrebbero rendere completamente conto delle azioni a distanza tra i tre conduttori 0, 1 e 2 per effetto dei campi elettrici. Va subito notato che il valore di

Ca tra il conduttore 1 e il conduttore 0 non può essere indipendente dalla presenza del conduttore 2 e analogamente Cb tra il conduttore 2 e il conduttore 0 non può essere indipendente dalla presenza del conduttore 1, infatti, nel caso limite in cui il conduttore 2 dovesse avvolgere completamente il conduttore 1 o viceversa, si comprende facilmente come Ca, o viceversa Cb, debbano ridursi a zero. In definitiva le capacità Ca e Cb assumono il massimo valore quando i due conduttori sono posti a distanza infinita tra di loro e tendono a ridursi man mano che vengono avvicinati. La capacità Cc lo stesso è influenzata dalla variazione della distanza tra i due conduttore ma qui occorre cautela: intendo dire che la capacità Cc, che ovviamente varia se viene fatta variare la distanza tra 1 e 2, varia in realtà in modo diverso da come varierebbe se non vi fossero le capacità Ca e Cb. Tipico esempio è quello di un condensatore ad armature piane dove, se viene fatta variare la distanza tra le armature, la capacità segue una legge di variazione diversa da quella prevista e questo fatto, che normalmente viene interpretato con l'incurvamento delle linee di forza del campo in prossimità dei bordi, ritengo possa essere anche inquadrato nell'ambito della presenza delle capacità parassite che si stabiliscono tra le armature e l'ipotetico conduttore a distanza infinita.

Consideriamo ora i tre valori di capacità C10, C20, C12 che, almeno idealmente, verrebbero letti collegando un capacimetro alle coppie di morsetti 1-0 , 2-0, e 1-2, essi sono ovviamente diversi dai valori di Ca, Cb, e Cc:

[10] $C_{10} = C_a + \frac{1}{\frac{1}{C_c} + \frac{1}{C_b}}$

[15] $C_{20} = C_b + \frac{1}{\frac{1}{C_c} + \frac{1}{C_a}}$

[20] $C_{12} = C_c + \frac{1}{\frac{1}{C_a} + \frac{1}{C_b}}$

Ca Cb e Cc, in pratica, non possono essere misurati singolarmente tramite un capacimetro: si potrebbe essere indotti a pensare di poter misurare Ca o Cb allontanando molto i due conduttori e collegando il capacimetro verso terra prima su un conduttore e poi sull'altro ma, da quanto detto Ca e Cb variano con la distanza e quindi la misura non sarebbe utile.

Con un po'di algebra si può però calcolare il contrario, cioè la dipendenza dei valori di Ca, Cb, e Cc dai valori delle capacità C10, C20, C12 che, per come sono state definite, sono direttamente misurabili tramite un capacimetro.

[25] $\frac{1}{Cc} = \frac{\left(\frac{1}{C_{10}} - \frac{1}{C_{20}} + \frac{1}{C_{12}}\right)\left(\frac{1}{C_{20}} - \frac{1}{C_{10}} + \frac{1}{C_{12}}\right)}{\left(\frac{1}{C_{10}} + \frac{1}{C_{20}} - \frac{1}{C_{12}}\right)} + \frac{1}{C_{12}}$

[30] $\frac{1}{Ca} = \frac{\left(\frac{1}{C_{12}} - \frac{1}{C_{20}} + \frac{1}{C_{10}}\right)\left(\frac{1}{C_{20}} - \frac{1}{C_{12}} + \frac{1}{C_{10}}\right)}{\left(\frac{1}{C_{12}} + \frac{1}{C_{20}} - \frac{1}{C_{10}}\right)} + \frac{1}{C_{10}}$

[35] $\frac{1}{Cb} = \frac{\left(\frac{1}{C_{10}} - \frac{1}{C_{12}} + \frac{1}{C_{20}}\right)\left(\frac{1}{C_{12}} - \frac{1}{C_{10}} + \frac{1}{C_{20}}\right)}{\left(\frac{1}{C_{10}} + \frac{1}{C_{12}} - \frac{1}{C_{20}}\right)} + \frac{1}{C_{20}}$

Consideriamo ora i coefficienti di potenziale P11, P21, P22, P21 così definiti:

P11 è il potenziale elettrico a cui si porterebbe la superficie del conduttore 1 rispetto al conduttore 0 preso come riferimento se una carica unitaria fosse disposta sul conduttore 1.

P21 è il potenziale elettrico a cui si porterebbe la superficie del conduttore 2 rispetto al conduttore 0 preso come riferimento se una carica unitaria fosse disposta sul conduttore 1.

P22 è il potenziale elettrico a cui si porterebbe la superficie del conduttore 2 rispetto al conduttore 0 preso come riferimento se una carica unitaria fosse disposta sul conduttore 2.

P12 è il potenziale elettrico a cui si porterebbe la superficie del conduttore 1 rispetto al conduttore 0 preso come riferimento se una carica unitaria fosse disposta sul conduttore 2.

P12 e P21 coincidono.

Appare ovvio il legame tra i valori dei coefficienti di potenziale così definiti e quelli delle capacità.

[40] $P_{11} = \frac{1}{C_{10}}$

[45] $P_{22} = \frac{1}{C_{20}}$

[50] $P_{12} = P_{21} = \frac{1}{C_{10}\left(\frac{C_b}{C_c}+1\right)} = \frac{1}{C_{20}\left(\frac{C_a}{C_c}+1\right)}$

E combinando con le precedenti

[55] $P_{12} = P_{21} = \frac{1}{\frac{C_a C_b}{C_c} + C_a + C_b} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{C_{10}} - \frac{1}{C_{12}} + \frac{1}{C_{20}}\right)$

Immaginiamo ora, dopo aver collegato tra loro i tre conduttori per un breve tempo in modo da scaricarli, di far migrare una certa quantità di carica dal conduttore 0 al conduttore 1 per esempio tramite un generatore di corrente collegato per un certo tempo tra i morsetti 0 e 1. Trascorso il tempo stabilito, dopo aver rimosso il generatore, troviamo una differenza di potenziale tra il conduttore 1 ed il conduttore 0 pari a:

[60] $U_1 = \frac{Q_1}{C_{10}} = P_{11} Q_1$

Notiamo che, per la presenza delle capacità Cb e Cc, anche il potenziale del conduttore 2 è variato nonostante quest'ultimo sia rimasto isolato e quindi sia rimasto di fatto scarico:

[65] $U_2 = P_{21} Q_1 = \frac{Q_1}{C_{10}\left(\frac{C_b}{C_c}+1\right)} = \frac{Q_1}{C_{20}\left(\frac{C_a}{C_c}+1\right)} \mid Q_2 = 0$

Notiamo inoltre che se avessimo effettuato questa operazione senza scaricare preventivamente i due conduttori e quindi con la presenza di un potenziale iniziale non nullo, le differenze tra i valori finali e quelli iniziali dei potenziali dei due conduttori sarebbero ancora coincise con quanto calcolato sopra.

Effettuiamo poi la stessa operazione scambiando i morsetti 1 e 2, ovviamente per simmetria otteniamo lo stesso risultato:

[70] $U_2 = \frac{Q_2}{C_{20}} = P_{22} Q_2$

[75] $U_1 = P_{12}Q_2 = \frac{Q_2}{C_{10}\left(\frac{C_b}{C_c}+1\right)} = \frac{Q_2}{C_{20}\left(\frac{C_a}{C_c}+1\right)} \mid Q_1 = 0$

Se ora effettuassimo, contemporaneamente o consecutivamente, la carica di entrambi i conduttori con due generatori diversi collegati rispettivamente tra le coppie di morsetti 1-0 e 2-0 potremmo senz'altro sommare gli effetti ottenendo in generale:

[80] $U_1 = P_{11}Q_1 + P_{12}Q_2 = \frac{Q_1}{C_{10}} + \frac{Q_2}{C_{20}\left(\frac{C_a}{C_c}+1\right)}$

[85] $U_2 = P_{22}Q_2 + P_{21}Q_1 = \frac{Q_2}{C_{20}} + \frac{Q_1}{C_{10}\left(\frac{C_b}{C_c}+1\right)}$

combinando con [10] e [20]

[90] $U_1 = \frac{Q_1\left(\frac{1}{C_c}+\frac{1}{C_b}\right)}{\frac{C_a}{C_c}+\frac{C_a}{C_b}+1} + \frac{Q_2\left(\frac{1}{C_b}\right)}{\frac{C_a}{C_c}+\frac{C_a}{C_b}+1}$

[95] $U_2 = \frac{Q_2\left(\frac{1}{C_c}+\frac{1}{C_a}\right)}{\frac{C_b}{C_c}+\frac{C_b}{C_a}+1} + \frac{Q_1\left(\frac{1}{C_a}\right)}{\frac{C_b}{C_c}+\frac{C_b}{C_a}+1}$

[100] $U_1 = \frac{1}{C_a} \cdot \frac{1}{\frac{1}{C_c}+\frac{1}{C_b}+\frac{1}{C_a}} \cdot \left(Q_1\left(\frac{1}{C_c}+\frac{1}{C_b}\right)+\frac{Q_2}{C_b}\right)$

[105] $U_2 = \frac{1}{C_b} \cdot \frac{1}{\frac{1}{C_c}+\frac{1}{C_a}+\frac{1}{C_b}} \cdot \left(Q_2\left(\frac{1}{C_c}+\frac{1}{C_a}\right)+\frac{Q_1}{C_a}\right)$

Da cui

[110] $U_{12} = U_1 - U_2$

$U_{12} = \frac{1}{\frac{1}{C_c}+\frac{1}{C_b}+\frac{1}{C_a}}\left(\frac{1}{C_a}\left(\frac{Q_1}{C_c}+\frac{Q_1}{C_b}+\frac{Q_2}{C_b}\right)-\frac{1}{C_b}\left(\frac{Q_2}{C_c}+\frac{Q_2}{C_a}+\frac{Q_2}{C_a}\right)\right)$

[115] $U_{12} = \dfrac{1}{\frac{1}{C_c} + \frac{1}{C_b} + \frac{1}{C_a}} \left(\dfrac{Q_1}{C_a C_c} - \dfrac{Q_2}{C_b C_c} \right)$

[120] $U_{12} = \dfrac{Q_1}{C_a + \frac{C_a C_c}{C_b} + C_c} - \dfrac{Q_2}{C_b + \frac{C_b C_c}{C_a} + C_c}$

Moltiplicando la prima frazione sopra e sotto per $\dfrac{1}{1 + \frac{C_a}{C_b}}$ e la seconda sopra e sotto per $\dfrac{1}{1 + \frac{C_b}{C_a}}$ si ottiene

[125] $U_{12} = \dfrac{Q_1 \left(\frac{1}{1+\frac{C_a}{C_b}} \right) - Q_2 \left(\frac{1}{1+\frac{C_b}{C_a}} \right)}{C_{12}}$

e quindi

$$U_{12} = \frac{Q_1 \left(\frac{1}{1+\frac{C_a}{C_b}} \right) - Q_2 \left(1 - \frac{1}{1+\frac{C_a}{C_b}} \right)}{C_{12}}$$

e se poniamo $K = \dfrac{1}{1 + \frac{C_a}{C_b}}$

[130] $U_{12} = \dfrac{Q_1 (K) - Q_2 (1 - K)}{C_{12}}$

e con altri passaggi si arriva anche a

[135] $K = \dfrac{C_{12}}{2} (P_{11} - P_{22}) + \dfrac{1}{2}$

La formula quindi è corretta. K dipende dal rapporto tra le due capacità parassite o, se vogliamo, dai coefficienti di potenziale che sono ad esse strettamente legati.

Conclusione

Vorrei porre l'attenzione su una questione per me importante riguardante la fisica di questi fatti: la distribuzione delle cariche sulla superficie dei due conduttori, se fossero posti a grande distanza tra di loro, dipenderebbe solo dalla loro forma. Se invece sono posti a breve distanza, oltre a dipendere dalla forma, dipende anche dalla interazione tra i due corpi: il campo generato dall'uno, se sono sufficientemente vicini, coinvolge sensibilmente l'altro e siccome le cariche si distribuiscono sempre per annullare il campo all'interno del conduttore, sono costrette ad un assetto diverso.

Nei calcoli che ho svolto non ho mai dovuto tener conto di questo perché, avendo sempre utilizzato solo le regole circuitali per la serie o il parallelo di condensatori, questo fatto è mascherato: le formule par il calcolo della serie o del parallelo di condensatori hanno la loro origine proprio da considerazioni sulla diversa distribuzione delle cariche sulle armature tra loro comunicanti di condensatori di diversa capacità e, anzi, proprio il concetto di capacità si basa su questo.

Quindi si potrebbe essere indotti a pensare che la ridistribuzione della carica sui conduttori per effetto dei campi abbia un ruolo importante nella generazione dei vari potenziali. Io sostengo il contrario, e dico invece che ha un ruolo marginale, anzi, spesso trascurabile e questo in fin dei conti determinò l'accesa discussione sul forum. La misura della ridistribuzione delle cariche dà sicuramente la possibilità di calcolare facilmente i potenziali quando si considerano le capacità ma non per questo li determina: è alla loro stregua un effetto e non una causa e quindi penso non sia sbagliato a priori un approccio che non la tenga in considerazione. La formula che ho proposto quindi funziona e il suo significato fisico è nel campo elettrico che è il vero protagonista nella determinazione del potenziale.

Per una migliore comprensione immaginiamo di sostituire i due corpi conduttori che abbiamo sin ora utilizzato con due corpi costituiti di materiale isolante ma della stessa identica forma dei precedenti ed anche elettricamente carichi con la stessa quantità di carica dei precedenti: nessuna ridistribuzione di cariche può avvenire per effetto delle interazioni elettriche tra i due corpi e, mancando le armature, non si può neanche parlare di capacità. Nonostante ciò il valore del potenziale che i campi determinano in prossimità dei corpi è quasi uguale a prima: quanto più le dimensioni dei due corpi carichi sono piccole rispetto alla loro distanza reciproca tanto più i valori dei potenziali sono uguali a prima e comunque è sempre possibile individuare all'interno dei corpi isolanti un punto in cui il valore del potenziale è uguale a quello sulla superficie dei conduttori di prima.. solo le eventuali piccole differenze del valore del potenziale negli altri punti interni ai corpi sono da attribuirsi alla assenza della ridistribuzione delle cariche sulle superfici.